

NICHTRENORMIERBARE FELDTHEORIEN

Ernst Pfaffelhuber

~~1966~~

1967

Nichtrenormierbare Feldtheorien

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt
von
Ernst Pfaffelhuber

August 1966



1. Berichterstatter: Priv.-Doz. Dr. W. Güttinger

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Jan. 1967

Zusammenfassung

Systematische Methoden zur Behandlung nichtrenormierbarer Theorien werden entwickelt. Für wachsende Spektralfunktionen wird eine subtraktionsfreie Lehmandarstellung abgeleitet. Zeitgeordnete, retardierte und avancierte Matrixelemente erweisen sich als bis auf einen Skalenparameter a eindeutig definierte verallgemeinerte Funktionen. Die Willkür in der Wahl von a hat keinen Einfluß auf physikalische Größen. Nicht zeitgeordnete Funktionale werden durch analytische Funktionen erzeugt. Lösungsmethoden für die Integralgleichungen von T-Produkten und Wightmanfunktionen werden direkt im Minkowskiraum entwickelt. Iteration ist möglich und liefert analytische Funktionen der Kopplungskonstanten. Durch komplexe Erweiterung können auch nichtanalytische Lösungen erzeugt werden. Die Untersuchung von Vier-Fermion-Theorien zeigt, daß Propagatoren und Zweiteilchenamplituden innerhalb der betrachteten Näherungen allen feldtheoretischen Axiomen genügen. Für singuläre Potentiale werden trotz Nichtexistenz ihrer Fouriertransformierten verallgemeinerte Streugleichungen in der Impulsraumdarstellung abgeleitet und ihr Zusammenhang mit analytischer Fortsetzung im Drehimpuls untersucht. Störungstheoretische Lösungen für T-Produkte im Minkowskiraum werden mit nicht störungstheoretischen Lösungen, die durch Peratisierung erhalten werden, verglichen.

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung	3
II. Axiomatik nichtrenormierbarer Theorien	
1. Spektraldarstellung und Charakterisierung der Zweipunktfunktionen	5
2. Lokalität, Analytizität und asymptotisches Verhalten der Spektralfunktionen	7
III. Formulierung nichtrenormierbarer Theorien mittels verallgemeinerter Funktionen	
1. Definition von T-Produkten	14
2. Die subtraktionsfreie Lehmandarstellung	18
3. Renormierungsfaktoren als Differentialoperatoren	20
4. Singuläre Integralgleichungen und Lösungsverfahren	22
IV. Vier-Fermion-Theorien	
1. Differential- und Integralgleichungen für Propagatoren und Zweiteilchenamplituden	27
2. Lösungen für Propagatoren, Spektralfunktionen, Renormierungsfaktoren, Zweiteilchenamplituden und T-Matrixelemente	30
V. Nichtrelativistische singuläre Wechselwirkungen	
1. Definition und Eigenschaften des regulären äquivalenten Potentials	39
2. Verallgemeinerte Lippmann-Schwinger-Gleichung und analytische Fortsetzung im Drehimpuls 1	46
VI. Zusammenfassung der Ergebnisse	51

AI. Notation und Formeln	58
AII. Lorentzinvariante Distributionen	
1. Definitionen	62
2. Impulsraumdarstellung, Skalen- parameterabhängigkeit	69
3. Differentialoperatoren, Berechnung der Renormierungsgrößen $Z_{2,3}^{-1}$	71
4. Faltungen	74
5. Spektraldarstellungen	75
AIII. Hochenergieabschätzung der Spektralfunktionen und Kausalität im eindimensionalen Beispiel	78
AIV. Integralgleichungen für Matricelemente	84
AV. LSZ-Formalismus für Fermionen	86
 Fußnoten	 89
Referenzen	91

I. Einleitung

Feldtheorien und S-Matrixformalismus nichtrenormierbarer Wechselwirkungen lassen sich kennzeichnen durch rasch (d.h. stärker als jede Potenz des Arguments) wachsende Spektralfunktionen, konstante oder langsam (d.h. wie eine gewisse Potenz der Energie) wachsende Diskontinuität der Streuamplitude entlang des linken Schnitts und wesentliche Singularitäten der Ortsraum-Matrixelemente am Ursprung und ihrer Fouriertransformierten bei unendlichen Impulsen. Schwache Wechselwirkungen, Vier-Fermion-Theorien, Austausch von Elementarteilchen höheren Spins gehören in diesen Rahmen, ebenfalls der Vorschlag von Feinberg und Pais, die Kopplung der Leptonen untereinander durch schwere Vektormesonen zu deuten und daraus Korrekturen höherer Ordnung zu berechnen. Diese Theorien stehen gegenwärtig im Mittelpunkt theoretischer Überlegungen((1)). Die üblichen Renormierungs- und Subtraktionsverfahren versagen in diesem Fall, da sie zu unendlich vielen Renormierungskonstanten Anlaß geben würden.

Wir entwickeln hier im Rahmen einer relativistischen Feldtheorie eine mathematische Methode zur strengen Behandlung nichtrenormierbarer Wechselwirkungen auf der Grundlage der Theorie der verallgemeinerten Funktionen.

In Kap. II diskutieren wir die allgemeinen Eigenschaften nichtrenormierbarer Theorien, geben ein Kriterium für Lokalität und leiten daraus eine universelle Hochenergieabschätzung für Impulsraum-Matrixelemente und Spektralfunktionen ab.

Das folgende Kap. III behandelt eine verallgemeinerte Lehmann-Darstellung der Feynmanpropagatoren im Impulsraum, die - im Gegensatz zur allgemeinen Auffassung - trotz wachsender Spektralfunktion keine Subtraktionen erfordert. Die subtraktionsfreien Propagatoren und analog alle übrigen zeitgeordneten Matrixelemente existieren als verallgemeinerte Funktionen und sind eindeutig bis auf einen willkürlichen Skalenparameter, der aus Dimensionsgründen nötig ist, aber keinerlei Einfluß auf physikalisch beobachtbare Größen besitzt.

Unter Benutzung der in Anhang II entwickelten Theorie lorentz-invarianter Distributionen¹⁾ ergibt sich eine neue Interpretation des Renormierungsbegriffs: die Renormierungsfaktoren $Z_{2,3}^{-1}$ sind nicht, wie bisher angenommen, divergente Konstanten, sondern Differentialoperatoren im x-Raum. Integralgleichungen für Propagatoren und Matrixelemente sind Faltungsgleichungen im Distributionssinn. Verschiedene Lösungsverfahren werden angegeben und diskutiert.

In Kap. IV wenden wir die erhaltenen Ergebnisse auf den Fall einer Vier-Fermion-Theorie mit skalarer oder pseudoskalarer Kopplung an, stellen im Rahmen der String- und Leiterapproximation die zugehörigen Differential- und Integralgleichungen auf und lösen sie nach den im dritten Kap. angegebenen Verfahren. Die zugehörigen Spektralfunktionen, Renormierungsfaktoren und T-Matrixelemente werden berechnet.

In Kap. V untersuchen wir nichtrelativistische singuläre Wechselwirkungen, insbesondere singuläre Streugleichungen und deren Partialwellenprojektionen.

In Kap. VI fassen wir unsere Ergebnisse zusammen. Sie werden mit neueren Arbeiten, insbesondere mit denen von Schroer((1)), Bardakci((1)) und Halpern((2)) kritisch verglichen. Unser wesentlichstes Ergebnis ist, daß nichtrenormierbare Feldtheorien im Minkowskiraum störungstheoretisch behandelt werden können, ohne daß Divergenzen auftreten. Nicht störungstheoretische Lösungen können mittels intermediärer euklidischer Konzepte erhalten werden, die jedoch mit bekannten grundlegenden physikalischen Annahmen der Feldtheorie, insbesondere Wechselwirkung durch Teilchenaustausch, unverträglich sind.

II. Axiomatik nichtrenormierbarer Theorien

1. Spektraldarstellung und Charakterisierung der Zweipunktfunktionen

Aus Lorentzinvarianz und nichtnegativem Energiespektrum ergibt sich folgende Spektraldarstellung für die Boson- und Fermion-zweipunktfunktionen²⁾((3)), ((4)):

$$(II.1) \quad \begin{aligned} \Delta'_\pm(x) &= \int d\alpha^2 \rho(\alpha^2) \Delta_\pm(x, \alpha^2), \\ S'_\pm(x) &= \int d\alpha^2 [\rho_1(\alpha^2)(-i\gamma_5) \Delta_\pm(x, \alpha^2) + \rho_2(\alpha^2) \Delta_\pm(x, \alpha^2)] = \\ &= \int d\alpha^2 [\rho_1(\alpha^2) S_\pm(x, \alpha^2) + (\alpha \rho_1(\alpha^2) + \rho_2(\alpha^2)) \Delta_\pm(x, \alpha^2)]. \end{aligned}$$

Propagatoren, Zweipunktfunktionen, Bethe-Salpeter-Amplituden usw. sind nach Definition verallgemeinerte Funktionen, also lineare stetige Funktionale über einem Raum von Testfunktionen.

Aus der positiven Metrik im Hilbertraum der Zustände folgt, daß $\Delta'_\pm$ und $S'_\pm$ positiv definite Distributionen sind. Auf Grund des verallgemeinerten Bochnertheorems((5)) lassen sich deshalb die Spektralfunktionen als positive Maße kennzeichnen:

$$(II.2) \quad \begin{aligned} \rho(\alpha^2) &\geq 0, \\ \alpha \rho_1(\alpha^2) \pm \rho_2(\alpha^2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Die Wahl des Grundfunktionenraums und demzufolge die Klasse der darauf definierten Distributionen richtet sich nach der Art der Wechselwirkung. Folgende Fälle sind denkbar:

- ρ, ρ_1, ρ_2 sind temperiert. $\Delta'_\pm(x), S'_\pm(x)$ können als Funktionale auf $\mathcal{S}, \mathcal{D}$ oder $\mathcal{K}(M)$ aufgefaßt werden³⁾.
- Die Spektralfunktionen sind nicht temperiert, wachsen also stärker als jede Potenz von α^2 für $\alpha^2 \rightarrow \infty$. In diesem Fall sind die Propagatoren Elemente aus $\mathcal{L}'$ oder $\mathcal{L}'(M)$ ³⁾.

Verallgemeinerte Funktionen in $\mathcal{S}'$ (temperierte Distributionen) sind Funktionale auf dem Raum $\mathcal{S}$ aller unendlich oft differenzierbaren Grundfunktionen ψ , die im Unendlichen stärker als jede negative Potenz des Abstands abfallen. Distributionen in $\mathcal{D}'$ sind definiert auf dem Raum $\mathcal{D}$ der Testfunktionen mit kom-

paktem Träger. $\mathcal{S}'$ ist enthalten in $\mathcal{D}'$, die Räume $\mathcal{K}'(n)$ liegen dazwischen: $\mathcal{S}' \subset \mathcal{K}'(n) \subset \mathcal{D}'$. Verallgemeinerte Funktionen in $\mathcal{S}'$ oder $\mathcal{K}'(n)$ sind analytische Funktionale, i.a. also von der Form

$$(II.3) \quad W(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int_C dx \, \omega(x) \varphi(x),$$

wobei C eine Hyperfläche des komplexen n -dimensionalen Raums, im einfachsten Fall eine Kurve in der komplexen x -Ebene darstellt.

Wegen

$$(II.4) \quad \Delta'_\pm(p) = \mp 2\pi i \, \Theta(\pm p^0) \mathcal{F}(p')$$

gilt nach der Parseval'schen Formel

$$(II.5) \quad \Delta'_\pm(x) \langle \varphi(x) \rangle = \mp 2\pi i \, \Theta(\pm p^0) \mathcal{F}(p') \langle \varphi(p) \rangle,$$

wobei $\varphi(p)$ die inverse Fouriertransformierte von $\varphi(x)$ ist. Für temperierte Spektralfunktionen existiert

$$(II.6) \quad \Delta'_\pm(p) \langle \varphi(p) \rangle = \mp 2\pi i \int dp \, \Theta(\pm p^0) \mathcal{F}(p') \varphi(p)$$

für $\varphi \in \mathcal{S}$. Da damit auch φ in $\mathcal{S}$ liegt, ist in diesem Fall $\Delta'_\pm(x)$ eine temperierte Distribution. Ist jedoch $\mathcal{S}$ nicht temperiert, benötigt man Testfunktionen $\varphi(p)$ mit kompaktem Träger (oder genügend raschem Abfall im Unendlichen), damit (II.6) existiert, also Elemente aus $\mathcal{D}$ (oder $\mathcal{K}(n)$). Ihre inversen Fouriertransformierten $\varphi(x)$ sind dann ganze analytische Funktionen aus $\mathcal{L}$ (oder $\mathcal{L}(n)$), $\Delta'_\pm(x)$ ein analytisches Funktional aus $\mathcal{X}'$ (oder $\mathcal{X}'(n)$).

Feldtheorien des Typs a) heißen renormierbar. Die Singularitäten ihrer Propagatoren am Lichtkegel sind nicht stärker als Pole endlicher Ordnung: für

$$(II.7) \quad \mathcal{F}(x') \sim (x')^{\lambda-2}, \quad x' \rightarrow 0$$

ist

$$(II.8) \quad \Delta'_\pm(x) \sim \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{(x-i\eta)^2} \right)^\lambda, \quad x' \rightarrow 0.$$

(Hier und im folgenden ist η ein Vektor aus dem Innern des vorderen Lichtkegels L^+ .)

Theorien vom Typ b) heißen nichtrenormierbar. Ihre Propagatoren divergieren am Lichtkegel stärker als jeder Pol endlicher Ordnung, besitzen hier also wesentliche Singularitäten. Für expo-

nentiell wachsende Spektralfunktionen

$$(II.9) \quad S \sim \exp(\alpha^2) \quad ; \quad \alpha^2 \rightarrow \infty$$

ist für $\alpha < \frac{1}{2}$

$$(II.10) \quad \Delta_+(x) \sim \lim_{\eta \rightarrow 0} \exp\left(\frac{-1}{(x-i\eta)^2}\right)^{\frac{1}{1-2\alpha}} \quad , \quad x^2 \rightarrow 0.$$

Für $\alpha > \frac{1}{2}$ ist der zu (II.9) gehörige Propagator nicht mehr analytisch in der längs der positiven reellen Achse aufgeschnittenen x^2 -Ebene (Fig. 1), was bereits auf den Zusammenhang von Lokalität, Analytizität und dem Verhalten der Spektralfunktionen im Unendlichen hinweist.

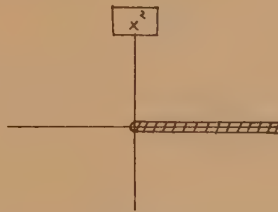


Fig. 1

2. Lokalität, Analytizität und asymptotisches Verhalten der Spektralfunktionen

Da Propagatoren nichtrenormierbarer Theorien Funktionale aus $\mathcal{Z}'$ sind, liegt zunächst der Schluß nahe, solche Theorien seien nichtlokal((6)): Der Träger des (Anti-)Kommutators Δ' (S') kann nämlich nicht mit Grundfunktionen $\varphi \in \mathcal{Z}$ getestet werden, die in einer Umgebung dieses Trägers identisch verschwinden, da sie als ganze analytische Funktionen dann überall Null wären. Diese Schwierigkeit läßt sich durch folgende Definition umgehen:

- Das analytische Funktional $W(x)$ heißt konzentriert in dem abgeschlossenen Bereich $\mathcal{L}$ des komplexen n -dimensionalen Raums, falls es erweitert werden kann zu einem linearen stetigen Funktional auf einem Raum Ω von Testfunktionen, die in $\mathcal{L}$ (und damit in einem offenen, $\mathcal{L}$ umfassenden Gebiet) analytisch sind.
- Der kleinste (d.h. der Durchschnitt) aller Bereiche, in denen

das Funktional $W(x)$ konzentriert ist, heißt Träger von W .

Zur Erläuterung betrachten wir im Eindimensionalen die Distribution

$$(II.11) \quad W(x) = \sum_0^{\infty} (-1)^n a_n \delta^{(n)}(x).$$

Aus der Cauchy'schen Integralformel ergibt sich

$$(II.12) \quad W(x) \langle \varphi(x) \rangle = \sum_0^{\infty} a_n \varphi^{(n)}(0) = \oint_T dx \, \omega(x) \varphi(x).$$

Dabei ist T eine geschlossene Kurve, auf der

$$(II.13) \quad \omega(x) = \frac{1}{x!} \sum_0^{\infty} \frac{n! a_n}{x^{n+1}}$$

gleichmäßig in x konvergiert. $\omega(x)$ ist die inverse Boreltransformierte der Fouriertransformierten

$$(II.14) \quad W(p) = F W(x) = \sum_0^{\infty} a_n (ip)^n$$

von $W(x)$.

$W(x)$ hat den Ursprung $x=0$ genau dann als Träger, wenn sich in (II.12) T auf einen beliebig kleinen Kreis zusammenziehen läßt. Der Konvergenzradius der Potenzreihe (II.13) muß also unendlich sein, was die Bedingung

$$(II.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! a_n} = 0$$

für die Koeffizienten a_n von (II.11) liefert.

(II.15) ist zugleich hinreichend und notwendig dafür, daß

$$(II.16) \quad |W(p)| e^{-\eta|p|} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty$$

für beliebiges $\eta > 0$. Das bedeutet, daß $W(p)$ eine Wachstumsordnung ≤ 1 und im Fall des Gleichheitszeichens den Wachstumstyp 0 besitzt. Entsprechend beweist man, daß

$$(II.17) \quad L(x) = \sum_0^{\infty} d_n \square^n \delta^4(x)$$

genau dann am Ursprung $x=0$ lokalisiert ist, wenn gilt:

$$(II.18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n)! d_n} = 0.$$

Für den Kommutator eines skalaren Feldes und die zugehörige Spektralfunktion

$$(II.19) \quad \Delta'(x) = \frac{1}{i} \langle 0 | [\phi(\frac{x}{2}), \phi(-\frac{x}{2})] | 0 \rangle$$

$$\int dx' \vartheta(x') \Delta(x, x') = \Delta_+'(x) + \Delta_-'(x)$$

$$\Delta_+'(x) = \frac{1}{i} \langle 0 | \phi(\frac{x}{2}) \phi(-\frac{x}{2}) | 0 \rangle = -\Delta_-'(x)$$

lassen sich durch ähnliche Überlegungen folgende zwei Theoreme beweisen:

Theorem 1: Hat $\Delta'(x)$ als Träger den Lichtkegel $x^2 > 0$, so gilt:

$$(II.20) \quad \Theta(p^0) \vartheta(p^0) e^{-\eta p^0} \rightarrow 0, \quad p^0 \rightarrow \infty$$

für beliebiges $\eta \in L^+$. Dabei ist $\Theta(\pm p^0) \vartheta(p^0)$ die Fouriertransformierte von $\Delta_{\pm}'(x)$:

$$(II.21) \quad 2\pi \Theta(\pm p^0) \vartheta(p^0) = \pm i \mathcal{F} \Delta_{\pm}'(x).$$

Theorem 2: Erfüllt ϑ die Bedingung (II.20), so ist $\Delta'(x)$ im Lichtkegel lokalisiert.

In Anhang III ist für das eindimensionale Analogon der Beweis gegeben. Er läßt sich ohne Schwierigkeiten auf den vierdimensionalen Fall verallgemeinern, wenn man reelles Massenspektrum voraussetzt:

$$(II.22) \quad \Delta'(p) = \mathcal{F} \Delta'(x) = 0 \quad \text{für} \quad p^0 < 0.$$

Die beiden Theoreme behaupten die Äquivalenz des Verschwindens des Kommutators für raumartige Abstände mit folgender Schranke für das Hochenergieverhalten der Spektralfunktion:

$$(II.23) \quad \Theta(p^0) \vartheta(p^0) e^{-\eta p^0} \rightarrow 0, \quad p^0 \rightarrow \infty, \quad \eta \in L^+$$

oder

$$(II.24) \quad |\vartheta(p^0)| \leq \text{const} \cdot e^{-\eta p^0}, \quad \eta \in L^+$$

oder

$$(II.25) \quad \vartheta(x^0) e^{-x\eta^0} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \eta^0 > 0.$$

Nimmt man zur Vereinfachung ϑ als lokal integrierbar an und setzt man voraus, daß $\Delta_{\pm}'$ von den analytischen Funktionen $\Delta_{\pm}'(x \mp i\eta)$ erzeugt werden, so gestaltet sich der Beweis einfach: Wegen der Relation (II.19) ist

$$(II.26) \quad \Delta'(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \{ \Delta_+'(x - i\eta) - \Delta_-'(x - i\eta) \}.$$

Da außerdem Δ'_* als lorentzinvariantes Funktional nur vom Quadrat des Arguments abhängt, ist das Verschwinden von Δ'_* für $x^2 < 0$ gleichbedeutend mit Analytizität von $\Delta'_*(x)$ in diesem Gebiet. Da für raumartige Abstände aber die Darstellung

$$(II.27) \quad \Delta'_*(x) = \frac{1}{4i\pi} \int dx' \vartheta(x') \frac{x K_1(x\sqrt{-x'})}{\sqrt{-x'}}$$

vgl. (AI.7) und für große x die asymptotische Entwicklung

$$(II.28) \quad K_1(x\sqrt{-x'}) \sim \sqrt{\frac{2}{x'}} (x\sqrt{-x'})^{-\frac{1}{2}} \exp(-x\sqrt{-x'})$$

gilt, ist Analytizität von Δ'_* für $x^2 < 0$ wiederum gleichbedeutend mit (II.25).

Analog zu Theorem 6 aus Anhang III haben wir die Darstellung

$$(II.29) \quad \Delta'_*(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int_{C_K} dx h(x) \varphi(x)$$

mit der Funktion

$$(II.30) \quad h(x) = \frac{1}{4i\pi} \int dx' \vartheta(x') \frac{x K_1(x\sqrt{-x'})}{\sqrt{-x'}}$$

und der Kurve C_K aus Fig. 2.

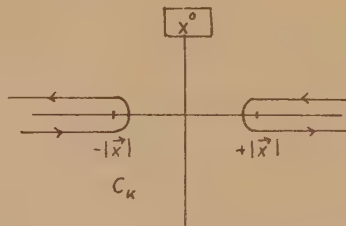


Fig. 2

Wegen (II.25) ist $h(x)$ analytisch in der aufgeschnittenen x^2 -Ebene (Fig. 1), als Funktion von x^0 analytisch in der komplexen x^0 -Ebene mit zwei Schnitten (Fig. 3), insbesondere auch auf dem Integrationsweg von (II.29).

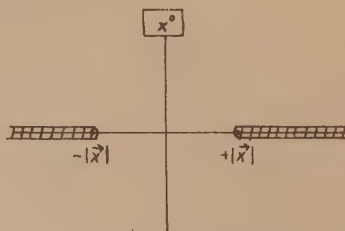


Fig. 3

Theorem 1 und 2 gelten in entsprechender Form auch für den Antikommutator eines Spinorfeldes. Wir formulieren sie hier für den einfachen Fall von Masse-Null-Teilchen, der Vollständigkeit halber sowohl für skalare wie für spinorielle Felder. In diesem Fall ist⁴⁾

$$(II.31) \quad \Delta'(x) = -\frac{1}{i\pi} \sum_0^{\infty} (n-1)! b_n \mathcal{E}(x') \mathcal{J}^{(n)}(x');$$

$$(II.32) \quad S'(x) = -\frac{1}{i\pi} (-i\delta) \sum_0^{\infty} (n-1)! c_n \mathcal{E}(x') \mathcal{J}^{(n)}(x').$$

Die zugehörigen Spektralfunktionen sind gegeben durch

$$(II.33) \quad \mathcal{P}(x') = \sum_0^{\infty} 4^{-n} b_n (x')^{n-1} \Theta(x'),$$

$$(II.34) \quad \mathcal{P}_s(x') = \sum_0^{\infty} 4^{-n} c_n (x')^{n-1} \Theta(x'); \quad \mathcal{P}_s(x') = 0.$$

Aus Theorem 1 und 2 folgt ein einfaches Kriterium für die Koeffizienten b_n, c_n :

Theorem 3: Δ', S' sind genau dann im Bereich $x^2=0$ lokalisiert, wenn gilt:

$$(II.35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(2n)!} b_n = 0,$$

$$(II.36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(2n)!} c_n = 0.$$

Diese Bedingungen sind äquivalent mit den Abschätzungen (II.23) bis (II.25) für das Hochenergieverhalten der Spektralfunktionen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_s$.

Für den Beweis beschränken wir uns auf den Fall von Spinorfeldern. Wegen⁴⁾

$$(II.37) \quad -2\pi i \mathcal{E}(x') \mathcal{J}^{(n)}(x') = n! \lim_{q \rightarrow 0} \left[\left(\frac{-1}{(x-iq)^2} \right)^{n+1} - \left(\frac{-1}{(x+iq)^2} \right)^{n+1} \right]$$

ist

$$(II.38) \quad S'(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int_T dx h(x) \varphi(x)$$

mit einer Kurve T , auf der

$$(II.39) \quad h(x) = \frac{1}{4i\pi} (-i\delta) \sum_0^{\infty} n!(n-1)! c_n \left(\frac{-1}{x^2} \right)^{n+1}$$

gleichmäßig konvergiert. Sie läßt sich genau dann auf den Bereich $x^2=0$ zusammenziehen, wenn die Potenzreihe mit den Koeffizienten aus (II.39) unendlichen Konvergenzhalbmesser besitzt. Für diesen gilt die Formel

$$(II.40) \quad R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n!(n-1)! |c_n|},$$

was den ersten Teil der Behauptung liefert. Der zweite Teil ist ein bekanntes Kriterium für Wachstumsordnung und -typ einer Potenzreihe⁵⁾.

Das in den obigen Theoremen enthaltene Ergebnis, daß die Hochenergieabschätzungen (II.23) und (II.24) für die Spektralfunktionen gleichwertig sind mit der Analytizität von $A'_2(x \mp i\eta)$ für $\eta \in L^+$, läßt sich auf beliebige Matrixelemente der Form

$$(II.41) \quad \begin{aligned} f_+(x) &= \langle \varphi | \phi_1(\frac{x}{2}) \phi_2(-\frac{x}{2}) | \mathcal{P} \rangle, \\ f_-(x) &= - \langle \varphi | \phi_2(-\frac{x}{2}) \phi_1(\frac{x}{2}) | \mathcal{P} \rangle \end{aligned}$$

und deren Fouriertransformierte

$$(II.42) \quad f_{\pm}(\pm p) = \mathcal{F} f_{\pm}(x)$$

verallgemeinern:

Theorem 4: Die Impulsraum-Matrixelemente $f_{\pm}(p)$ besitzen genau dann einen nach negativen p^0 hin beschränkten Träger und genügen der Relation

$$(II.43) \quad f_{\pm}(p) e^{-\eta p} \rightarrow 0, \quad p^0 \rightarrow \infty$$

für beliebiges $\eta \in L^+$, wenn $f_{\pm}(x)$ erzeugt wird durch eine für $\eta \in L^+$ analytische Funktion $f_{\pm}(x \mp i\eta)$ (die dann als Funktion von x^2 analytisch ist in der aufgeschnittenen x^2 -Ebene gemäß Fig. 1).

Der Beweis läuft ähnlich wie die in Anhang III geführten Überlegungen: Aus (II.43) und der Beschränktheit des Trägers von $f_{\pm}(p)$ ergibt sich, daß

$$(II.44) \quad (\frac{1}{2\pi})^4 f_{\pm}(\pm p) \langle e^{-ip(x \mp i\eta)} \rangle = f_{\pm}(x \mp i\eta)$$

und ebenfalls alle Ableitungen nach $x \mp i\eta$ existieren und weiter die Gleichung

$$(II.45) \quad f_{\pm}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int dx f_{\pm}(x \mp i\eta) \varphi(x \mp i\eta).$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Ist umgekehrt (II.45) erfüllt, so ist $f_{\pm}(x)$ definiert auf dem Raum Ω der Grundfunktionen φ , die in einem Streifen $\{x \mp i\eta, \eta \in \eta'\}$ ⁶⁾ mit geeignetem η' analytisch sind, $f_{\pm}(p)$ ist somit erklärt auf dem Raum $\tilde{\Omega}$ der Fouriertransformierten $\varphi(p)$, woraus der zweite Teil der Behauptung folgt (vgl. Anhang III).

Aus Theorem 4 folgt insbesondere, daß die Streuamplitude als Fouriertransformierte eines (zeitgeordneten oder retardierten) Matrixelementes der Form (II.41) der Einschränkung

$$(II.46) \quad T(s) \leq \text{const } e^{\epsilon \sqrt{s}}, \quad \epsilon > 0$$

hinsichtlich ihres Hochenergieverhaltens genügt, falls man die in Theorem 4 erwähnten Analytizitätseigenschaften der Ortsraummatrixelemente voraussetzt. s ist dabei das Quadrat der Gesamtenergie.

III. Formulierung nichtrenormierbarer Theorien mittels verallgemeinerter Funktionen

1. Definition von T-Produkten

Die den Formeln (II.1) entsprechende Lehmanndarstellung für die zeitgeordneten Vakuum Erwartungswerte lautet:

$$(III.1) \quad \Delta_F'(x) = \int d\alpha^2 \rho(\alpha^2) \Delta_F(x, \alpha^2),$$

$$S_F'(x) = \int d\alpha^2 [\rho_1(\alpha^2) (-i\gamma_0) \Delta_F(x, \alpha^2) + \rho_2(\alpha^2) \Delta_F(x, \alpha^2)].$$

Wegen

$$(III.2) \quad \Delta_F'(x) = \lim_{Q^2 = \sum Q^2 \rightarrow +0} \Delta_F'(Q),$$

wobei die quadratische Form Q gegeben ist durch

$$(III.3) \quad Q^2 = -x^2 + iQ_2 = (-g_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu}) x^\mu x^\nu = a_{\mu\nu} x^\mu x^\nu,$$

$$Q_2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \text{ positiv definit}$$

(vgl. Anhang II), und auf Grund der asymptotischen Beziehung

$$(III.4) \quad \Delta_F(Q, \alpha^2) = \Delta_F(x, \alpha^2) \Big|_{-x^2+i0 \rightarrow Q} = \frac{i}{4\pi^2} \frac{x \cdot K_1(x\sqrt{Q})}{\sqrt{Q}} \sim$$

$$\sim \frac{i}{2} (2\pi)^{-3/2} x^{1/2} Q^{-3/4} \exp(-x\sqrt{Q}), \quad x \rightarrow \infty$$

existieren die Integrale

$$(III.5) \quad \int d\alpha^2 \rho(\alpha^2) \Delta_F(Q, \alpha^2) = \Delta_F'(Q),$$

$$\int d\alpha^2 \rho_{1,2}(\alpha^2) \Delta_F(Q, \alpha^2)$$

für $x \neq 0$, falls die Spektralfunktionen den aus Kap. II folgenden asymptotischen Bedingungen (II.23) bis (II.25) genügen, was wir in Zukunft voraussetzen.

Im skalaren Fall (der spinorielle läßt sich analog durchführen) betrachten wir zunächst die Spektralfunktion

$$(III.6) \quad \rho^{(\lambda)}(\alpha^2) = \frac{1}{4^{\lambda-1} (\lambda-2)! (\lambda-1)!} (\alpha^2)^{\lambda-2} \theta(\alpha^2), \quad \operatorname{Re} \lambda > 1.$$

(Für $\lambda=1$ ist

$$(III.7) \quad \rho^{(\lambda)}(\alpha^2) \Big|_{\lambda=1} = \frac{1}{(\lambda-2)!} (\alpha^2)^{\lambda-2} \theta(\alpha^2) \Big|_{\lambda=1} = \int(\alpha^2).)$$

Die Hankeltransformation (III.1) (vgl. (AI.7)) läßt sich ausführen, und wir finden für den zugehörigen Propagator

$$(III.8) \quad \Delta_F'(Q) = \int dx^4 \varphi^{(\lambda)}(x^4) \Delta_F(Q, x^4) = \frac{i}{4\pi} Q^{-\lambda}, \quad \lambda \neq 0$$

$\Delta_F'(Q) \langle \varphi(x) \rangle$ ist also das der Funktion (III.8) entsprechende Funktional. Das Problem, nicht integrierbaren Funktionen (für $\text{Re} \lambda > 2$ ist (III.8) am Ursprung nicht integrierbar) Distributionen zuzuordnen, ist eine der zentralen Fragestellungen der Theorie verallgemeinerter Funktionen.

Für nichtganze λ existiert eine natürliche Definition, die sog. "kanonische Regularisierung" (k.R.), ausgezeichnet durch Linearität:

$$(III.9) \quad k.R. \{ \alpha F_1(Q) + \beta F_2(Q) \} = \alpha k.R. F_1(Q) + \beta k.R. F_2(Q),$$

durch Vertauschbarkeit mit dem (III.3) zugeordneten Differentialoperator, der in der Grenze $Q_2 \rightarrow 0$, d.h. $\eta_{\mu\nu} \rightarrow 0$, in den lorentzinvarianten Operator $-\square$ übergeht:

$$(III.10) \quad k.R. \{ a^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu F(Q) \} = a^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu k.R. F(Q)$$

mit

$$(III.11) \quad a_{\mu\nu} a^{\mu\nu} = \int d\mu^4$$

und durch Vertauschbarkeit mit Multiplikatoren $\alpha(x)$:

$$(III.12) \quad k.R. \{ \alpha(x) F(Q) \} = \alpha(x) k.R. F(Q).$$

Für $\varphi = \varphi^{(\lambda)}$ erhält man als Ergebnis für $\lambda \neq 2, 3, \dots$

$$(III.13) \quad \Delta_F'(Q) \langle \varphi(x) \rangle = \frac{i}{4\pi} A_F \int dx^4 Q^{-\lambda} \left(\frac{a^4}{Q} \right)^{\lambda} \varphi(x),$$

wobei A_F bedeutet: Man berechne das Integral in (III.13) für genügend große negative z (z.B. für $1 < \text{Re}(\lambda + z) < 2$), für die es konvergiert, und setze das Resultat analytisch nach $z=0$ fort. Der Faktor a^2 ist aus Dimensionsgründen nötig: für $\hbar=c=1$ ist $\dim a^2 = \dim x^2 = \text{cm}^2$. Doch ist (III.13) unabhängig von a . Somit ergibt sich für $\varphi = \varphi^{(\lambda)}$:

$$(III.14) \quad \Delta_F'(x) \langle \varphi(x) \rangle = \frac{i}{4\pi} D_F^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle, \\ D_F^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \lim_{Q_2 \rightarrow 0} \frac{A_F}{z \rightarrow 0} \int dx^4 Q^{-\lambda} \left(\frac{a^4}{Q} \right)^{\lambda} \varphi(x).$$

Eine andere Überlegung führt zum gleichen Ergebnis: Für nichtganze λ ist wegen

$$(III.15) \quad a^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Delta_F(Q, x^4) = x^4 \Delta_F(Q, x^4), \quad \lambda \neq 0$$

die linke Seite von (III.8) für $x \neq 0$ gleich

$$(III.16) \quad (a^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu)^{[\lambda]-1} \int d\alpha^2 \varphi^{(\lambda)}(\alpha^2) (\alpha^2)^{-[\lambda]+1} \Delta_F(Q, \alpha^2) = \\ = \frac{i}{4\pi^2} \frac{(\lambda - [\lambda] - 1)! (\lambda - [\lambda])!}{4^{[\lambda]-1} (\lambda-2)! (\lambda-1)!} (a^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu)^{[\lambda]-1} Q^{-\lambda+[\lambda]-1}.$$

($[\lambda]$ bedeutet das kleinste Ganze des Realteils von λ .) Somit ist $\Delta_F'(Q)$ aus (III.8) für $x \neq 0$ dargestellt als Ableitung endlicher Ordnung eines regulären Funktionals. ($Q^{-\lambda+[\lambda]-1}$ ist integrierbar am Ursprung.) Als natürliche Definition ergibt sich daraus für $\varphi = \varphi^{(\lambda)}$

$$(III.17) \quad \Delta_F'(x) = \frac{i}{4\pi^2} D_F^{(\lambda)}(x), \\ D_F^{(\lambda)}(x) = \frac{(\lambda - [\lambda] - 1)! (\lambda - [\lambda])!}{4^{[\lambda]-1} (\lambda-2)! (\lambda-1)!} (-\square)^{[\lambda]-1} \left(\frac{-1}{x^2 - i0} \right)^{\lambda - [\lambda] + 1}$$

Nach (AII.41) ist dies mit (III.14) identisch.

Für ganze λ ,

$$(III.18) \quad \lambda = n, \quad n = 2, 3, \dots,$$

hat $D_F^{(n)}$ einfache Pole (vgl. (AII.19)). In diesem Fall ist $D_F^{(n)}$ erklärt durch den regulären Teil der Laurententwicklung von $D_F^{(n)}$ an der Stelle $\lambda = n$ (Res = Residuuum):

$$(III.19) \quad D_F^{(n)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \left[D_F^{(n)}(x) - \frac{\text{Res } D_F^{(n)}(x)}{\lambda - n} \right] \langle \varphi(x) \rangle \Big|_{\lambda=n}.$$

Eine andere Definitionsmöglichkeit für ganze λ -Werte ist in Anhang II, Formel (AII.18), gegeben. Der Unterschied zu (III.19) ist ein am Ursprung lokalisierter Term $\square^{n-2} \int^4(x)$.

(III.14) und (III.19) lassen sich zusammenfassen zu

$$(III.20) \quad D_F^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} D_F^{(\lambda+z)}(x) a^{zz} \langle \varphi(x) \rangle = \\ = \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \lim_{\alpha^2 \rightarrow 0} \int d\alpha^2 Q^{-\lambda} \left(\frac{\alpha^2}{Q} \right)^z \varphi(x),$$

symbolisch

$$(III.21) \quad D_F^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \left(\frac{-1}{x^2 - i0} \right)^\lambda \langle \varphi(x) \rangle = \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int d\alpha^2 \left(\frac{-1}{x^2 - i0} \right)^\lambda \left(\frac{-\alpha^2}{x^2 - i0} \right)^z \varphi(x).$$

Die allgemeinste (nicht kanonische) Definition von $D_F^{(\lambda)}$ unterscheidet sich von der hier gegebenen (III.21) um

$$(III.22) \quad \sum_{i=0}^{[\lambda]-2} d_i \square^i \int^4(x)$$

mit beliebigen endlichen Koeffizienten d_i . Dies folgt aus der

Tatsache, daß für alle ψ mit

$$(III.23) \quad \square^i \psi(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, [\lambda] - 1$$

das Integral

$$(III.24) \quad \lim_{\eta_{\mu\nu} \rightarrow 0} \int dx \left(\frac{-1}{x^2 - i\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu} \right)^\lambda \psi(x)$$

existiert und mit jeder möglichen Definition von $D_F^{(\lambda)}(x) \langle \psi(x) \rangle$ übereinstimmen muß.

Für Spektralfunktionen mit dem asymptotischen Verhalten

$$(III.25) \quad \rho(x^2) \sim (x^2)^{\lambda-1} \theta(x^2), \quad x \rightarrow \infty$$

existiert $\Delta_F'(a)$ aus (III.5) ebenfalls für $x \neq 0$ und ist von der Form

$$(III.26) \quad \Delta_F'(a) = \mathcal{L}(x) a^{-\lambda}.$$

$\mathcal{L}(x)$ ist ein Multiplikator. Wie vorhin gilt auch hier wieder

$$(III.27) \quad \begin{aligned} \Delta_F'(x) \langle \psi(x) \rangle &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \lim_{a \rightarrow 0} \int dx \Delta_F'(a) \left(\frac{a^2}{Q} \right)^z \psi(x) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \int dx \Delta_F'(x) \left(\frac{-a^2}{x^2 - i0} \right)^z \psi(x), \end{aligned}$$

wobei $\Delta_F'(a)$ im Integranden von (III.27) gleich der klassischen (für $x \neq 0$ definierten) Funktion aus (III.5) ist. Der Fall logarithmischer Terme in der Spektralfunktion läßt sich leicht durch Differenzieren nach dem Exponenten λ erhalten; wir gehen hier nicht darauf ein. I.a. ist ρ eine Summe von Termen der Art (III.25), $\Delta_F'(a)$ also von der Form

$$(III.28) \quad \sum_n \mathcal{L}_n(x) a^{-\lambda_n}.$$

Das Funktional $\Delta_F'(x) \langle \psi(x) \rangle$ ist dann definiert durch gliedweise Anwendung von (III.27). Für nichtrenormierbare Theorien ((III.28) ist dann eine unendliche Summe) ist damit $\Delta_F'(x)$ und ebenfalls jedes zeitgeordnete Matrixelement $\mathcal{P}_F$ erklärt durch die allgemeine Vorschrift

$$(III.29) \quad \mathcal{P}_F(x) \langle \psi(x) \rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \int dx \mathcal{P}_F(x) \left(\frac{-a^2}{x^2 - i0} \right)^z \psi(x),$$

die im obigen Sinn zu interpretieren ist.

Für die ganzen λ -Werte (III.18) hängt $D_F^{(\lambda)}$ explizit von a ab. (vgl. (AII.39)). Insbesondere gilt für die zu den Spektralfunktionen (II.33) und (II.34) gehörigen Propagatoren

$$(III.30) \quad \Delta_F'(x) = \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} n! (n-1)! b_n \left(\frac{-1}{x^2-i0} \right)^{n+1},$$

$$(III.31) \quad S_F'(x) = \frac{i}{4\pi^2} (-i\delta) \sum_{n=0}^{\infty} n! (n-1)! c_n \left(\frac{-1}{x^2-i0} \right)^{n+1},$$

daß die Unterschiede

$$(III.32) \quad \Delta_F'(x)|_a - \Delta_F'(x)|_{\bar{a}} = -\log\left(\frac{a^2}{\bar{a}^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} b_n (-\square)^{n-1} S^4(x),$$

$$(III.33) \quad S_F'(x)|_a - S_F'(x)|_{\bar{a}} = -\log\left(\frac{a^2}{\bar{a}^2}\right) (-i\delta) \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} c_n (-\square)^{n-1} S^4(x)$$

wegen (II.35), (II.36) und (II.18) an der Stelle $x=0$ lokalisierte Terme darstellen.

Läßt man a willkürlich, so sind demnach zeitgeordnete Matrixelemente $\{F$ nur bis auf einen am Ursprung lokalisierten Term L bestimmt⁷⁾. Doch werden die physikalischen Größen, Spektralfunktionen, Wirkungsquerschnitte usw. nicht von dieser Unbestimmtheit und der Willkür des Skalenparameters a beeinflusst⁷⁾. Da sie durch die Diskontinuität der Fouriertransformierten solcher Matrixelemente entlang der positiven p^2 -Achse gegeben sind, liefert das Funktional

$$(III.34) \quad L(p) = \mathcal{F} L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (-p^2)^n$$

keinen Beitrag.

2. Die subtraktionsfreie Lehmandarstellung

Die im Impulsraum gewöhnlich verwendete Spektraldarstellung

$$(III.35) \quad \Delta_F'(p) = \int dx^2 \frac{\mathcal{F}(x^2)}{x^2 - p^2 - i0}$$

existiert nicht, falls $\mathcal{F}$ nicht genügend schnell im Unendlichen abfällt. Andererseits besitzt $\Delta_F'(x)$ als analytisches Funktional sicher eine Fouriertransformierte; die formale Darstellung (III.35) ist also falsch. Der Grund liegt darin, daß in (III.1) die Fouriertransformation nicht mit der x^2 -Integration vertauschbar ist.

Wegen

$$(III.36) \quad \Delta_F'(p) = \Delta_F'(x) \langle e^{ipx} \rangle$$

ist

$$(III.37) \quad \Delta_F'(p) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int dx \Delta_F'(x) \left(\frac{-a'}{x' - i0} \right)^z e^{ipx}.$$

Für $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{(\lambda)}$ finden wir insbesondere:

$$(III.38) \quad \begin{aligned} \Delta_F'(p) &= \mathcal{F} \int dx' \mathcal{S}^{(\lambda)}(x') \Delta_F(x, x') = \frac{i}{4\pi} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \mathcal{F} \mathcal{D}_F^{(\lambda+z)}(x) a^{2z} \\ &= \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \mathcal{F} \int dx' \mathcal{S}^{(\lambda+z)}(x') \Delta_F(x, x'). \end{aligned}$$

Für genügend große z läßt sich die Fouriertransformation unter dem Integral ausführen und man erhält:

$$(III.39) \quad \begin{aligned} \Delta_F'(p) &= \mathcal{F} \int dx' \mathcal{S}^{(\lambda)}(x') \Delta_F(x, x') \\ &= \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int dx' \frac{\mathcal{S}^{(\lambda+z)}(x') a^{2z}}{x'^2 - p'^2 - i0}. \end{aligned}$$

(Die explizite Angabe der Fouriertransformierten erfolgt in Anhang II.) Für nichtganze λ ist (III.39) gleichbedeutend mit

$$(III.40) \quad \begin{aligned} \Delta_F'(p) &= \frac{i}{4\pi} \overline{\mathcal{D}_F^{(\lambda)}}(p), \\ \frac{i}{4\pi} \overline{\mathcal{D}_F^{(\lambda)}}(p) &= \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int dx' \frac{\mathcal{S}^{(\lambda)}(x') (a' x')^z}{x'^2 - p'^2 - i0} \end{aligned}$$

(Definition von $\overline{\mathcal{D}_F^{(\lambda)}}(x) = \mathcal{F}^{-1} \overline{\mathcal{D}_F^{(\lambda)}}(p)$ in (AII.18)), für die ganzen λ -Werte unterscheidet sich (III.40) von (III.39) um einen Summanden $\square^{n-2} \mathcal{F}^4(x)$. Deshalb stimmt die Darstellung

$$(III.41) \quad \Delta_F'(p) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int dx' \frac{\mathcal{S}(x') (a' x')^z}{x'^2 - p'^2 - i0}$$

die entsprechend wie (III.29) zu interpretieren ist, im x -Raum bis auf ein am Ursprung lokalisiertes Funktional L mit (III.37) überein, was aber für die Definition von $\Delta_F'(x)$ sowieso unwesentlich ist. Bei einer allgemeinen, nicht kanonischen Regularisierung von Δ_F' würde die rechte Seite von (III.41) um eine (für nichtrenormierbare Theorien unendliche) Summe erweitert, deren einzelne Glieder die Fouriertransformierten der Terme (III.22) darstellen; statt der subtraktionsfreien Lehmann-Darstellung (III.41) erhielte man wie im üblichen Subtraktionsformalismus unendlich viele Renormierungskonstanten, falls die Spektralfunktionen nicht temperiert sind.

Aus (III.41) ergibt sich unter Beachtung des bei Formel (III.34) Gesagten:

$$(III.42) \quad \begin{aligned} \operatorname{disc} \Delta_F'(p) &= \operatorname{disc} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int dx' \frac{\mathcal{S}(x') (a' x')^z}{x'^2 - p'^2 - i0} \\ &= 2i\pi \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int dx' \mathcal{S}(x') (a' x')^2 \int (p'^2 - x'^2) = 2i\pi \mathcal{S}(p') \end{aligned}$$

(disc = Diskontinuität längs der p^2 -Achse). $\mathcal{F}$ ist dabei die gleiche Spektralfunktion wie in (II.1): Okubos((7)) und Halperns ((2)) Behauptung, verschiedene Propagatoren (z.B. Δ_F' und Δ_A') benötigten verschiedene Spektralfunktionen, ist unzutreffend.

Analoge Überlegungen lassen sich für die übrigen "inhomogenen" Vakuumerwartungswerte (vgl. Anhang II) Δ_F' , Δ_R' , Δ_A' usw. und ebenso für den Spinorfall durchführen.

3. Renormierungsfaktoren als Differentialoperatoren

Die in Anhang II gegebenen Definitionen und die daraus resultierenden Formeln (AII.60), (AII.62) liefern für renormierbare wie nichtrenormierbare Theorien, für die das klassische Integral (III.35) divergiert, eine neue Deutung der Renormierungsfaktoren Z_2^{-1} , Z_3^{-1} : Sie sind nicht divergente Konstanten, sondern lorentzinvariante Differentialoperatoren im Ortsraum. Für die Spektralfunktionen (II.33), (II.34) mit⁸⁾

$$(III.43) \quad \mathcal{G}_m|_{m=0} = c_m|_{m=0} = \frac{1}{(m-1)!} \Big|_{m=0}$$

erhält man

$$(III.44) \quad -\mathcal{S}(x') \partial_0 \Delta'(x) = \mathcal{S}^4(x) + \square L_3(x) = \tilde{Z}_3^{-1} \mathcal{S}^4(x),$$

$$L_3(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!(2n+1)}{4^n (n+1)!} \mathcal{G}_m(-\square)^{n-1} \mathcal{S}^4(x),$$

$$(III.45) \quad -i \beta^0 \mathcal{S}(x^0) \mathcal{S}'(x) = \mathcal{S}^4(x) + \square L_2(x) = \tilde{Z}_2^{-1} \mathcal{S}^4(x),$$

$$L_2(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!(2n+1)}{4^n (n+1)!} c_m(-\square)^{n-1} \mathcal{S}^4(x),$$

also

$$(III.46) \quad \tilde{Z}_3^{-1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!(2n+1)}{4^n (n+1)!} \mathcal{G}_m(-\square)^n,$$

$$(III.47) \quad \tilde{Z}_2^{-1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!(2n+1)}{4^n (n+1)!} c_m(-\square)^n,$$

$L_{2,3}$ und damit auch $Z_{2,3}^{-1} \mathcal{S}^4(x)$ sind am Ursprung konzentrierte Funktionale. Würde man die Renormierungsgrößen als Konstanten betrachten, erhielte man das übliche Ergebnis $Z_{2,3}^{-1} = \infty$, da die Ableitungen der $\mathcal{S}$ -Funktion auf der rechten Seite von (III.44), (III.45) stärker singular sind als $\mathcal{S}^4(x)$.

Folgendes ist zu beachten:

- a) Enthalten die Spektralfunktionen nur nichtganze Potenzen von x^2 , so sind die Renormierungsfaktoren gleich 1.
- b) Für ganze Potenzen hängt das Ergebnis wesentlich von der auf verschiedene Weise möglichen Definition der zugeordneten "inhomogenen" (d.h. zeitgeordneten, retardierten und avancierten) Propagatoren, also von der Wahl des Skalenparameters a ab und unterscheidet sich von (III.44), (III.45) um die Ableitung eines am Ursprung lokalisierten Funktionals, was nur einer Änderung der Terme $L_{2,3}$ entspricht. Bei geeigneter Definition - aus der auch die Spektraldarstellung (III.41) resultiert (vgl. (AII.18), (AII.63), (AII.83), (AII.84)) - erhält man stets

$$(III.48) \quad \overline{Z}_{2,3}^{-1} = 1.$$

Diese Definition ist vielleicht die zweckmäßigste, da sie für die Renormierungsgrößen nur den bei allen Skalenparametertransformationen invarianten Anteil (III.48) liefert.

- c) Dies läßt jedoch nicht den Schluß auf eine freie Theorie zu ((8)); nur bei Existenz des Integrals (III.35) nämlich ist die Bedingung $Z=1$ äquivalent mit einer freien Theorie.

Für den gleichzeitigen (Anti-)Kommutator ergibt sich aus den Formeln (III.44) und (III.45):

$$(III.49) \quad -\partial_0 \Delta'(x-x')_{x^0=x'^0} = - \int dx^0 \delta(x^0-x'^0) \partial_0 \Delta'(x-x') = \\ = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') + \sum_i \frac{(n-1)! (2m+1)}{4^n (n+1)!} b_m \Delta^n \delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$(III.50) \quad -i \delta^0 S'(x-x')_{x^0=x'^0} = -i \delta^0 \int dx^0 \delta(x^0-x'^0) S'(x-x') = \\ = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') + \sum_i \frac{(n-1)! (2m+1)}{4^n (n+1)!} c_m \Delta^n \delta^3(\vec{x}-\vec{x}').$$

Die Form (III.49) und nicht die üblicherweise verwendete

$$(III.51) \quad -\partial_0 \Delta'(x-x')_{x^0=x'^0} = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

stellt die korrekte Verallgemeinerung der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen

$$(III.52) \quad \frac{1}{i} [q_r, p_s] = \delta_{rs}$$

auf den Fall kontinuierlicher Indizes $\vec{x}, \vec{x}'$ dar. Aus (III.52) folgt nämlich nur, daß $-\partial_0 \Delta'(x-x')_{x^0=x'^0}$ ein am Ursprung $\vec{x}-\vec{x}'=0$ konzen-

triertes Funktional mit:

$$(III.53) \quad -\{d^3x \int_0 \Delta'(x-x')_{x=x'} = 1$$

darstellt, so daß sich genau (III.49) mit der Bedingung (II.35) für die Koeffizienten b_n ergibt, wenn man noch räumliche Isotropie voraussetzt.

Damit erhalten wir als Ergebnis, daß die renormierten Feldoperatoren (vgl. Fußnote 8)) den gleichen Vertauschungsrelationen genügen, wie sie für die nichtrenormierten Heisenbergoperatoren durch korrekte Verallgemeinerung von (III.52) folgen: Die bei der Renormierung auftretenden Divergenzen in der üblichen Formulierung ($Z_{2,3}^{-1}$ als Konstanten) werden durch die neue Interpretation der Renormierungsfaktoren vermieden.

4. Singuläre Integralgleichungen und Lösungsverfahren

Propagatoren, Zwei- und Mehrteilchenamplituden sind definiert als verallgemeinerte Funktionen. Sie genügen gewissen Integralgleichungen (vgl. Kap. IV und Anhang IV) der Form

$$(III.53) \quad f(x) = f_0(x) + g \int dx' G(x-x') V(x') f(x') = f_0(x) + g G(x) * V(x) f(x),$$

die demzufolge als Faltungsgleichungen im Distributionssinn zu interpretieren sind. Für wightmanartige (d.h. nicht zeitgeordnete) Funktionen

$$(III.54) \quad f = f_{\pm}$$

sind die in (III.53) auftretenden Produkte erklärt, da die Faktoren Randwerte analytischer Funktionen sind und ihre Fouriertransformierten eine Faltungsalgebra bilden. Z.B. ist

$$(III.55) \quad \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{(x \mp i q)^4} \right)^{\lambda} \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{(x \mp i q)^4} \right)^{\mu} = \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{(x \mp i q)^4} \right)^{\lambda + \mu}$$

Da außerdem die Funktionale (III.54) - im Gegensatz zu Schroers und Bardakci's ((1)) Behauptung - zu ihrer Definition keine Regularisierungsvorschrift benötigen, ist auch das Faltungsprodukt in (III.53) unproblematisch. Gleichungen für wightmanartige Funktionen sind iterierbar; die analytischen Funktionen, durch

deren Randwerte sie gegeben sind:

$$(III.56) \quad f_{\pm}(x) = \lim_{q \rightarrow 0} f_{\pm}(x \mp iq),$$

genügen nämlich klassischen Fredholm'schen Integralgleichungen. (III.53) läßt sich für die Größen (III.54) mit den Faltungsformeln (AII.65), (AII.66) unmittelbar durch Iteration lösen. Das Ergebnis ist also stets analytisch in der Kopplungskonstanten g und erfüllt alle aus der Axiomatik folgenden Bedingungen.

Wegen der Unbestimmtheit zeitgeordneter Matrixelemente

$$(III.57) \quad f = f_F$$

am Ursprung - zumindest, wenn sie ganze Potenzen von $(-x^2 + i0)^{-1}$ enthalten - kann auch die Integralgleichung für T-Produkte nur bis auf einen bei $x=0$ lokalisierten Term erfüllt werden, wenn wir den Skalenparameter a willkürlich lassen. Die in (III.53) für $f=f_F$ auftretenden Produkte singulärer Distributionen können wieder durch die Residuumvorschrift

$$(III.58) \quad \{f_{F_1}(x) \cdot f_{F_2}(x)\} \langle \varphi(x) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int dx f_{F_1}(x) f_{F_2}(x) \left(\frac{-a'}{x' - i0} \right)^2 \varphi(x)$$

definiert werden. Die Faltungen berechnen sich nach (AII.67), (AII.68). Gleichungen für T-Produkte lassen sich somit ebenfalls durch Iteration lösen (Methode A). Im folgenden Kap. wird sich ergeben, daß jeder Iterationsterm einem Feynmangraphen entspricht und die Gesamtlösung allen axiomatischen Forderungen (Positiv-Definitheit der Spektralfunktionen, stärkere Singularität der Propagatoren als die der entsprechenden freien am Lichtkegel, Übereinstimmung zeitgeordneter mit wightmanartigen Funktionen für Zeiten größer bzw. kleiner als Null, Cutkosky-Regel) genügt.

Die mit Methode A gewonnene Lösung stellt eine formale Iterationsreihe dar. Aufsummation zu einer geschlossenen Form ist zwar manchmal möglich (vgl. (IV.40), (IV.53)), doch ist diese Form (als analytisches Funktional) wiederum nur durch die Iterationsreihe definiert. Wightmanartige Funktionen jedoch sind auch in geschlossener Darstellung als Funktionale

$$(III.59) \quad f_{\pm}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int dx f_{\pm}(x \mp iq) \varphi(x \mp iq)$$

erklärt und sind identisch mit ihrer Iterationsreihe

(III.60)

$$f_+(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n f_+^{(n)}(x),$$

da in

$$(III.61) \quad \sum_{n=0}^{\infty} g^n f_+^{(n)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \int dx f_+^{(n)}(x+i\eta) \varphi(x+i\eta)$$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe für $\eta \in L^+$ Summe und Integral vertauschbar sind.

Eine andere Möglichkeit (Methode B), Integralgleichungen für T-Produkte zu interpretieren, ist die Gelfand'sche komplexe Erweiterung, eine Verallgemeinerung der euklidischen Rotation:

$$(III.62) \quad Q = Q_1 + i Q_2 = a_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

sei eine quadratische Form mit positiv definitem Imaginärteil und $f_F(Q)$ eine für $\text{Im } Q > 0$ analytische Funktion ihres Arguments, für die

$$(III.63) \quad \int dx f_F(Q) \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{Z}$$

existiert. Durch die Werte

$$(III.64) \quad f_F(Q) \langle \varphi(x) \rangle = f_F(iQ_2) \langle \varphi(x) \rangle = \int dx f_F(iQ_2) \varphi(x)$$

auf der positiv imaginären Halbachse der Q -Ebene (d.h. für positiv definites Q_2) ist das zugeordnete Funktional eindeutig bestimmt. Das T-Produkt

$$(III.65) \quad f_F(-x^2+i0) \langle \varphi(x) \rangle$$

ist dann gegeben durch analytische Fortsetzung in den Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ und anschließender Limesbildung:

$$(III.66) \quad a_{\mu\nu} \rightarrow -g_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \text{ positiv definit,} \\ \eta_{\mu\nu} \rightarrow 0.$$

Für beliebige Funktionen $f_F(Q)$, für die (III.63) nicht notwendig existiert, übernehmen wir diese Vorschrift als Definition:

$$(III.67) \quad f_F(-x^2+i0) \langle \varphi(x) \rangle = \lim_{\eta_{\mu\nu} \rightarrow 0} a_{\mu\nu} \xrightarrow{AF} -g_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu} f_F(Q) \langle \varphi(x) \rangle,$$

wobei $f_F(Q) \langle \varphi(x) \rangle$ das der Funktion $f_F(Q)$ zugeordnete Funktional ist. T-Produkte sind also wie auch wightmanartige Matrixelemente Grenzwerte anderer Funktionale; diese werden aber nicht wie in (III.56) durch analytische Funktionen erzeugt, sondern sind selbst singular, bedürfen somit einer Regularisierungsvor-

schrift. Die zugehörigen Integralgleichungen für die Funktionen $f_{\mathbb{F}}(Q)$ besitzen keine klassischen Iterationslösungen und sind nicht vom Fredholm'schen Typ.

Aus (III.67) ergibt sich folgende Lösungsmethode für die Integralgleichungen von T-Produkten: Man ersetze x^{μ} durch

$$(III.68) \quad x^{\mu'} = \alpha^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

so daß $-x'^2$ eine rein positiv-imaginäre Form

$$(III.69) \quad -x'^2 = a_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = i Q_2$$

darstellt. (Es genügt i.a.,

$$(III.70) \quad i Q_2 = i \sum_{h=0}^3 \alpha^{(h)2} (x^h)^2, \quad \alpha^{(h)} \text{ reell}$$

zu wählen.) Die so erhaltenen Integralgleichungen löse man im euklidischen vierdimensionalen Raum und berechne den Limes

(III.66) bzw.

$$(III.71) \quad \alpha_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} \rightarrow 0.$$

Die Lösung von (III.53) für T-Produkte $f_{\mathbb{F}}$ hängt ab von der Interpretation der komplex erweiterten Gleichungen für $f_{\mathbb{F}}(Q)$ bzw. $f_{\mathbb{F}}(x')$ im euklidischen Raum:

- a) Als klassische, nicht Fredholm'sche Gleichungen betrachtet, ergeben sie als Lösungen - sofern überhaupt welche existieren - nichtanalytische Funktionen der Kopplungskonstanten. Diese lassen sich mit der in ((9)) entwickelten Peratisierungsmethode berechnen und verschwinden samt allen Ableitungen am Ursprung $x'=0$. Da der Grenzübergang (III.66) i.a. nicht gleichförmig ist, kann man mehrere Lösungen für die Größen (III.57) erhalten. Doch kann auch der Fall eintreten, daß keine klassische Lösung existiert. (vgl. auch Kap. IV)
- b) Als Faltungsgleichungen für Distributionen im euklidischen Raum aufgefaßt, liefern sie Iterationsreihen von singulären Funktionalen. Solche Lösungen existieren stets. Das Iterationsschema entspricht völlig der Methode A und liefert im Limes (III.66), (III.71) dieselben Resultate. (vgl. Kap. IV)

Eine dritte Möglichkeit (Methode C) der Interpretation der Integralgleichungen (III.53) für T-Produkte bestünde darin, die

Funktionale $f_{\mathbb{F}}(-x^2+io)$ als Grenzwerte der am Lichtkegel regulären Funktionen $f_{\mathbb{F}}(-x^2+if)$ anzusehen, in den Gleichungen $(-x^2+io)$ durch $(-x^2+if)$ zu ersetzen, sie zu lösen und dann

- a) den Limes $f \rightarrow +0$ zu berechnen oder
- b) jede Funktion $f_{\mathbb{F}}(-x^2+if)$ als Lösung zu definieren, die die Integralgleichung bis auf $\delta(\xi)$ erfüllt.

Im folgenden Kap. IV wird sich jedoch herausstellen, daß im Fall a) i.a. kein Limes existiert und Fall b) zu keinen eindeutigen Resultaten führt.

IV. Vier-Fermion-Theorien

1. Differential- und Integralgleichungen für Propagatoren und Zweiteilchenamplituden

Wir gehen aus von der Wechselwirkung

$$(IV.1) \quad \mathcal{L}_{int} = G j_A j_B,$$

$$(IV.2) \quad j_A = : \bar{\Psi}_A T \Psi_A : , \quad j_B = : \bar{\Psi}_B T \Psi_B :$$

zweier Fermionenfelder Ψ_A und Ψ_B mit skalarer oder pseudoskalar-
rer Kopplung

$$(IV.3) \quad T = 1 \text{ oder } \gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$(IV.4) \quad \begin{aligned} \vec{D} \Psi_A &= \tilde{\Psi}, \quad \tilde{\Psi} = -G T \Psi_A j_B, \\ \bar{\Psi}_A \gamma^0 \vec{D}^\dagger \gamma^0 &= \tilde{\bar{\Psi}}, \quad \tilde{\bar{\Psi}} = -G j_B \bar{\Psi}_A T \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$(IV.5) \quad D = i \gamma \partial - m_A, \quad D^\dagger = -i \gamma^t \partial - m_A.$$

Hieraus erhält man nach Anhang IV Differential- und Integral-
gleichungen für die Zweipunktfunktionen, die in der Stringapprox-
imation folgende Form annehmen:

$$(IV.6) \quad \vec{D}_x S'_I(x) \gamma^0 \vec{D}_x^\dagger \gamma^0 = -g T V_I(x, m_B^2) S'_I(x) T,$$

$$(IV.7) \quad \vec{D}_x S'_F(x) \gamma^0 \vec{D}_x^\dagger \gamma^0 = (-i \gamma^0 S(x^0) S'(x^0)) \gamma^0 \vec{D}_x^\dagger \gamma^0 - g T V_F(x, m_B^2) S'_F(x) T,$$

$$(IV.8) \quad \begin{aligned} S'_I(x) &= S_I(x, m_A^2) - \\ &- g \int du dv S_R(x-u, m_A^2) T V_I(u-v, m_B^2) S'_I(u-v) T S_A(v, m_A^2), \end{aligned}$$

$$(IV.9) \quad \begin{aligned} S'_F(x) &= \int du S_F(x-u, m_A^2) (-i \gamma^0 S(u^0) S'(u^0)) \\ &- g \int du dv S_F(x-u, m_A^2) T V_F(u-v, m_B^2) S'_F(u-v) T S_F(v, m_A^2) \end{aligned}$$

mit der Kopplungskonstanten

$$(IV.10) \quad g = (4\pi)^{-1} G^2$$

und den "Potentialen"

$$(IV.11) \quad \frac{1}{4T} V_2(x, m_B^2) = - \langle 0 | j_m^B(x, \frac{x}{2}) j_m^B(\bar{x}, \frac{x}{2}) | 0 \rangle = \\ = -T \{ S_2(x, m_B^2) T S_2(\bar{x}, m_B^2) T \},$$

$$(IV.12) \quad \frac{1}{4T} V_F(x, m_B^2) = - \langle 0 | T j_m^B(x, \frac{x}{2}) j_m^B(\bar{x}, \frac{x}{2}) | 0 \rangle = \\ = -T \{ S_F(x, m_B^2) T S_F(\bar{x}, m_B^2) T \}.$$

Dem LSZ-Formalismus((10)) entsprechend haben wir dabei renormierte Feldoperatoren

$$(IV.13) \quad \Psi_A(x) \longrightarrow \Psi_{A_{in}}(x), \quad x^0 \longrightarrow \mp \infty$$

vorausgesetzt.

Die Stringapproximation für Propagatoren und die im folgenden verwendete Leiterapproximation für Zweiteilchenamplituden sind folgendermaßen definiert:

- Man setze in den exakten Gleichungen, die in Anhang IV abgeleitet werden, den Antikommutator von A- und B-Teilchen auch für zeitartige Abstände gleich Null, so daß man in allen Matrixelementen die A-Operatoren rechts von den B-Operatoren schreiben kann.
- Zwischen A- und B-Operatoren schiebe man einen Satz von Zwischenzuständen ein und berücksichtige nur den Vakuumzustand.
- Die B-Operatoren werden durch die freien in-Operatoren ersetzt.

Die physikalische Bedeutung dieser Näherungen ergibt sich aus der graphischen Interpretation der Integralgleichungen und ihrer Lösungen, die in Abschnitt 2 besprochen wird.

Die Zweiteilchenamplituden

$$(IV.14) \quad \chi_+(x, y) = \langle 0 | \Psi_A(x) \widetilde{\Psi}_A(y) | \bar{A}_{in}(2) A_{in}(1) \rangle = f_+(x-y) e^{-iP(\frac{x+y}{2})} \\ \chi_-(x, y) = \langle 0 | \widetilde{\Psi}_A(y) \Psi_A(x) | \bar{A}_{in}(2) A_{in}(1) \rangle = f_-(x-y) e^{-iP(\frac{x+y}{2})}$$

und die Bethe-Salpeter-Amplitude

$$(IV.15) \quad \chi_F(x, y) = \langle 0 | T \Psi_A(x) \widetilde{\Psi}_A(y) | \bar{A}_{in}(2) A_{in}(1) \rangle = f_F(x-y) e^{-iP(\frac{x+y}{2})}$$

beschreiben den Streuprozeß (Fig. 4)

$$(IV.16) \quad A(1) + \bar{A}(2) \longrightarrow A(3) + \bar{A}(4)$$

eines Fermion-Antifermionpaares $A\bar{A}$ mit Helizitäten und Impulsen s_1, p_1 und s_2, p_2 .

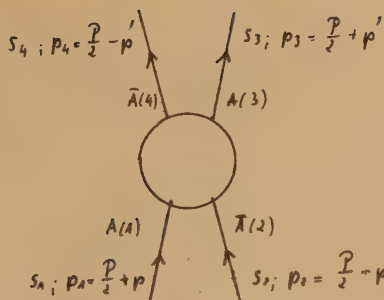


Fig. 4

In der Leiterapproximation erhalten wir folgende Gleichungen:

$$(IV.17) \quad \vec{D}_x \chi_{\pm}^{\pm}(x, y) \gamma^0 \vec{D}_y^{\dagger} \gamma^0 = -g T^{\dagger} V_{\pm}^{\pm}(x-y, m_B^2) \chi_{\pm}^{\pm}(x, y) T^{\dagger},$$

$$(IV.18) \quad \chi_{\pm}^{\pm}(x, y) = \chi_{\pm in}^{\pm}(x, y) - \\ - g \int du dv S_R(x-u, m_A^2) T^{\dagger} V_{\pm}^{\pm}(u-v, m_B^2) \chi_{\pm}(u, v) T^{\dagger} S_A(v-y, m_A^2),$$

$$(IV.19) \quad \chi_F^{\pm}(x, y) = \chi_{F in}^{\pm}(x, y) - \\ - g \int du dv S_F(x-u, m_A^2) T^{\dagger} V_F^{\pm}(u-v, m_B^2) \chi_F^{\pm}(u, v) T^{\dagger} S_F(v-y, m_A^2)$$

mit den inhomogenen Termen

$$(IV.20) \quad \chi_{F in}^{\pm}(x, y) = \chi_{\pm}^{\pm}(x, y) \Big|_{\gamma_A^{\pm} = \gamma_{in}^{\pm}}.$$

Für den pseudoskalaren Anteil

$$(IV.21) \quad \langle \frac{1}{(2\pi)^3} \rangle \psi_{\pm}^{\pm}(x) = T^{\dagger} \{ i \gamma_5 \psi_{\pm}^{\pm}(x) \}$$

finden wir für den Grenzfall verschwindender Gesamtenergie $P=0$:

$$(IV.22) \quad (\square + m_A^2) \psi_{\pm}^{\pm}(x) = -g T^{\dagger} V_{\pm}^{\pm}(x, m_B^2) \psi_{\pm}^{\pm}(x)$$

und unter Berücksichtigung von

$$(IV.23) \quad \int dv S_A(v-y, m_A^2) i \gamma_5 S_R(x-u, m_A^2) = \Delta_R(x-y, m_A^2) i \gamma_5$$

$$(IV.24) \quad \psi_{\pm}^{\pm}(x) = \psi_{\pm in}^{\pm}(x) - \\ - g T^{\dagger} \int dy \Delta_R(x-y, m_A^2) V_{\pm}^{\pm}(y, m_B^2) \psi_{\pm}^{\pm}(y).$$

In der Darstellung

$$(IV.25) \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i=1,2,3$$

erhält man für Masse-Null-Teilchen ($m_A=0$):

$$(IV.26) \quad \psi_{\pm}(x) = -\psi_{\mp}(x) = \psi_{F,\pm}(x) = \left(\frac{s_2 + s_2'}{2}\right)^2 e^{-ipx}.$$

Im Fall pseudoskalarer Kopplung und gleicher Helizität der einfallenden Teilchen lautet somit (IV.24):

$$(IV.27) \quad \psi_{\pm}(x) = \pm e^{-ipx} + \int dy \Delta_F(x-y, m_A^2=0) V_F(y, m_B^2) \psi_{\pm}(y).$$

2. Lösungen für Propagatoren, Spektralfunktionen, Renormierungsfaktoren, Zweiteilchenamplituden und T-Matrixelemente

Gleichung (IV.8) für die Wightmanfunktionen, graphisch dargestellt in Fig. 5, läßt sich, wie in Kap. III behauptet, iterieren (Fig. 6).

$$\overline{s_2'} = \overline{s_2} + \text{Diagram: a circle with a horizontal line through its center. The line is labeled s_2' in the middle, s_R on the left, and s_A on the right. The top and bottom of the circle are labeled T.$$

Fig. 5

$$\overline{s_2'} = \overline{s_2} + \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \dots$$

Diagram 1: A circle with a horizontal line through its center. The line is labeled \$s_2\$ in the middle, \$g V_2\$ below it, and \$T\$ at both ends. Diagram 2: A circle with a horizontal line through its center. The line is labeled \$s_2\$ in the middle, \$g V_2\$ below it, and \$T\$ at both ends. The entire diagram is enclosed in a larger circle with \$T\$ at the top and bottom.

Fig. 6

Für masselose Teilchen ($m_A = m_B = 0$) erhält man in der Bezeichnungsweise von Anhang II:

$$(IV.28) \quad V_z(x) = V_z(x, m_B^2 = 0) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{4}{(x \mp iq)^2} = \mp 4 D_z^{(3)}(x),$$

$$(IV.29) \quad V_F(x) = V_F(x, m_B^2 = 0) = \frac{4}{(x - i0)^2} = -4 D_F^{(3)}(x),$$

so daß sich wegen (III.66) für S_z^+ der Iterationsansatz

$$(IV.30) \quad S_z^+(x) = \frac{1}{4i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)! n! c_n S_z^{(n+1)}(x),$$

$$(n-1)! c_n|_{n=0} = 1; \quad c_{2n+1} = 0$$

machen läßt, der die Rekursionsformel

$$(IV.31) \quad (2n+1)! c_{2n+2} = g (2n-1)! c_{2n} \frac{1}{(2n+4)(2n+3)(2n+2)^2}$$

mit der Lösung

$$(IV.32) \quad c_{2n} = \left(\frac{g}{4}\right)^n \frac{1}{(2n-1)! n! (n+1)! (2n+1)!}$$

liefert. Also ist

$$(IV.33) \quad S_z^+(x) = \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \pm \frac{1}{4i\pi} (-i\gamma_0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{g}{4}\right)^n \frac{1}{n! (n+1)! (2n+1)!} \left(\frac{-1}{(x \mp iq)^2}\right)^{2n+1} \right\} =$$

$$= S_z(x, 0) \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{-\sqrt{g}/2}{(x \mp iq)^2}\right)^{-1} I_1\left(\frac{-\sqrt{g}}{(x \mp iq)^2}\right) \right\}.$$

Das gleiche Ergebnis folgt mit dem Ansatz

$$(IV.34) \quad S_z^+(x) = S_z(x, 0) \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{\omega} Y(\omega) \right\}; \quad \omega = \frac{-\sqrt{g}}{(x \mp iq)^2}$$

und der Randbedingung

$$(IV.35) \quad S_z^+(x) \rightarrow S_z(x, 0); \quad x^0 \rightarrow \pm \infty$$

aus der Differentialgleichung (IV.6). Wir erhalten

$$(IV.36) \quad Y'' + \frac{1}{\omega} Y' - \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right) Y = 0$$

mit den zwei linear unabhängigen Lösungen I_1, K_1 . Wegen (IV.35) scheidet die zweite aus, so daß sich wieder (IV.33) ergibt.

Der Antikommutator (II.32) berechnet sich zu

$$(IV.37) \quad S'(x) = S_z'(x) + S_z^+(x) = -\frac{1}{2\pi} (-i\gamma_0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{g}{4}\right)^n \frac{1}{n! (n+1)! (2n+1)!} E(x^0) S^{(2n)}(x^2);$$

für gleiche Zeiten (III.45) ist

$$(IV.38) \quad -i\gamma_0 S(x^2) S'(x) = \chi_2^{-1} S^4(x),$$

$$\chi_2^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g}{4}\right)^n \frac{4n+1}{n! (n+1)! [(2n+1)!]^2} \square^{2n},$$

so daß das inhomogene Glied in (IV.9) gleich

$$(IV.39) \quad \sum_i^{-1} S_F(x, 0) = S_F(x, 0) + (-i\gamma_0) \square \sum_0^{\infty} \left(\frac{g}{4}\right)^{n+1} \frac{4n+5}{(n+1)!(n+2)! [(2n+3)!]^2} \square^{2n} S^4(x)$$

wird, was wegen der Willkür des Skalenparameters ersetzt werden kann durch den freien Feynmanpropagator S_F . Somit ist auch die Gleichung (IV.9) für den zeitgeordneten Propagator und ihre nach Methode A gewonnene Iterationslösung dem Graphenschema von Fig. 5 und 6 äquivalent. Die Rechnung ergibt für masselose Teilchen mit Hilfe von (AII.68) bis auf einen am Ursprung lokalisierten Term

$$(IV.40) \quad S_F'(x) = \frac{i}{4\pi^2} \sum_0^{\infty} (n-1)! n! (n!) S_F^{(n+1)}(x) = S_F(x, 0) \left(\frac{-\sqrt{g}/2}{x^2 - i0} \right)^{-1} I_1 \left(\frac{-\sqrt{g}}{x^2 - i0} \right)$$

(I_1 ist durch seine Potenzreihe definiert), was für $x^0 > 0$ mit $-S_+^*(x)$, für $x^0 < 0$ mit $S_-^*(x)$ übereinstimmt.

Die Methode B der komplexen Erweiterung ergibt mit

$$(IV.41) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}^\mu_\nu &= g^\mu_\nu \sqrt{-i g_{\nu\nu}} \mathcal{L}^{(\nu)}, \quad \mathcal{L}^{(\nu)} > 0, \\ x^{0'} &= x^0 \sqrt{-i} \mathcal{L}^{(0)}, \quad x^{e'} = x^e \sqrt{i} \mathcal{L}^{(e)}, \quad e=1,2,3, \\ -x'^2 &= i \sum_{e=0}^3 \mathcal{L}^{(e)2} (x^e)^2 \end{aligned}$$

die Gleichung

$$(IV.42) \quad \begin{aligned} S_{\text{inkl.}}'(x) &= S_F(x', 0) - \\ &- g S_F(x', 0) * T V_F(x') S_{\text{inkl.}}'(x) T * S_F(x', 0) \end{aligned}$$

(Faltung bezüglich x). Sie hat keine klassische Funktion als Lösung, da aus der zugehörigen Differentialgleichung und Randbedingung

$$(IV.43) \quad \begin{aligned} S_{\text{inkl.}}'(x) &= S_F(x', 0) \left(\frac{-\sqrt{g}/2}{x'^2} \right)^{-1} I_1 \left(\frac{-\sqrt{g}}{x'^2} \right), \\ \sqrt{g} &= \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-i} \mathcal{L}^{(0)} \sqrt{i} \mathcal{L}^{(1)} \sqrt{i} \mathcal{L}^{(2)} \sqrt{i} \mathcal{L}^{(3)}} \end{aligned}$$

als Resultat folgen würde, das aber am Ursprung $x'=0$ exponentiell divergiert, so daß das Integral in (IV.42) klassisch nicht

existiert. Doch ist (IV.43) bis auf ein am Ursprung lokalisier-
tes Funktional die Lösung von (IV.42) im Distributionssinn, wenn
 I_1 durch seine Potenzreihe definiert und $(\frac{1}{iQ_2})^\lambda = (iQ_2)^{-\lambda}$ (in völliger
Analogie zu (III.21)) erklärt ist durch

$$(IV.44) \quad (iQ_2)^{-\lambda} \langle \varphi(x) \rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \int dx (iQ_2)^{-\lambda} \left(\frac{z}{iQ_2} \right)^x \varphi(x).$$

Der Grenzübergang (III.66) bzw. (III.71), in diesem Fall also

$$(IV.45) \quad x^{e'} \rightarrow x^e (1-i0); \quad x^{e'} \rightarrow x^e (1+i0), \quad e=1,2,3$$

ergibt wieder (IV.40).

Aus $S'_\pm$ berechnen sich durch Fouriertransformation oder mit Hil-
fe von $\frac{1}{\pm}$ (AII.78) die Spektralfunktionen (II.34) zu

$$(IV.46) \quad \begin{aligned} \rho_1(x^2) &= \delta(x^2) + \tilde{\sigma}(x^2), \\ \tilde{\sigma}(x^2) &= \sum_n \left(\frac{1}{64}\right)^n \frac{1}{n!(n+1)!(2n-1)!(2n+1)!} (x^2)^{2n-1} \sigma(x^2), \\ \rho_2(x^2) &= 0, \\ x \rho_1(x^2) \pm \rho_2(x^2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten also folgendes Ergebnis: Die Theorie ist lokal; der
Antikommutator $S'(x)$ ist konzentriert auf den Lichtkegel (in un-
serem Fall masseloser Teilchen sogar auf seinen Rand $x^2=0$). In
Übereinstimmung mit den Theoremen 1 bis 3 genügen deshalb die
Koeffizienten c_n aus (IV.30), (IV.32) der Relation (II.36) und
 ρ_1 besitzt eine Wachstumsordnung

$$(IV.47) \quad \inf \{ \mu: \rho_1(x^2) \leq C(\mu) \exp(x^2)^\mu \} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \log(2n)}{-\log |4^{-2n} c_{2n}|} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

und erfüllt die Positivitätsbedingung (II.2). Die Wightmanfunk-
tionen $S'_\pm(x)$ werden erzeugt durch die für $\eta \in L^+$ analytischen
Funktionen

$$(IV.48) \quad S'_\pm(x \mp i\eta) = \pm \frac{i}{4\pi^2} \left[(-i\delta_0) \frac{1}{(x \mp i\eta)^2} \right] \left(\frac{-\sqrt{2}/2}{(x \mp i\eta)^2} \right)^{-1} \tilde{I}_1 \left(\frac{-\sqrt{2}}{(x \mp i\eta)^2} \right).$$

Ihre Fouriertransformierten genügen somit nach Theorem 4 der
asymptotischen Bedingung (II.43), die in diesem Fall äquivalent
mit (IV.47) ist, da $S'_\pm(p)$ mit $\mp 2\tilde{H}((- \delta_0) \sigma(\pm p^0) \rho_1(p^2))$ übereinstimmt.
Zudem ist analog zum skalaren Fall (III.42) die Diskontinuität
von $S'_F(p)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.49)} \quad \text{dix } S_F'(p) &= \text{dix } S_F(p, 0) + \\
 &+ \text{dix } \gamma_p \sum_n \left(\frac{g}{64}\right)^n \frac{(p^2)^{2n-1}}{n! (n+1)! (2n-1)! (2n+1)!} \left\{ \log \left[\frac{-a^2}{4} (p^2 + i0) \right] - \gamma(2n+1) - \gamma(2n) \right\} \\
 &- 2i\pi \gamma_p \delta(p^2) - 2i\pi \gamma_p \delta(p^2) = -2i\pi \gamma_p \delta_1(p^2) + 2i\pi \delta_2(p^2)
 \end{aligned}$$

(Zur Berechnung von $S_F'(p)$ siehe (AII.34), (AII.35)). Dasselbe Resultat erhält man durch Anwendung der Cutkosky-Regel((11)) auf die Iterationsdiagramme des Feynmanpropagators S_F' (Fig. 7).

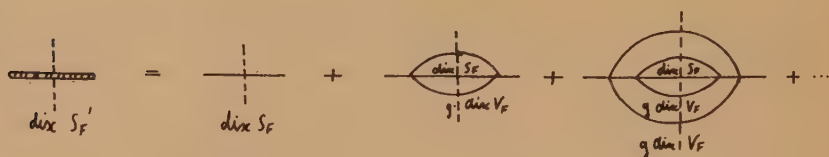


Fig. 7

Die Gleichungen (IV.27) für die Zweiteilchenamplituden $\varphi_F(x)$ und ihre Iterationslösungen werden graphisch für die zugehörigen Vierpunktfunktionen in Fig. 8 dargestellt:

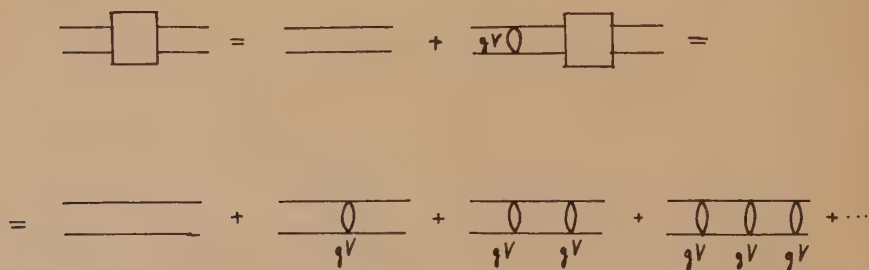


Fig. 8

Für verschwindenden Relativimpuls p nehmen sie die Form

$$\text{(IV.50)} \quad \varphi_{\pm}(x) = 1 + g \int dy \Delta_R(x-y, 0) V_{\pm}(y) \varphi_{\pm}(y),$$

$$\text{(IV.51)} \quad \varphi_F(x) = 1 + g \int dy \Delta_F(x-y, 0) V_F(y) \varphi_F(y)$$

an und können wegen (AII.65), (AII.67) in ähnlicher Weise wie (IV.8), (IV.9) durch Iteration gelöst werden. Für die nicht zeitgeordneten Funktionen erhält man

$$(IV.52) \quad \psi_z(x) = \pm \cosh \frac{\sqrt{g}}{(x \pm i\eta)^2}$$

und für die Bethe-Salpeter-Amplitude nach Methode A

$$(IV.53) \quad \psi_F(x) = \cosh \frac{\sqrt{g}}{x' - i0}$$

wobei der hyperbolische Cosinus durch seine Potenzreihe definiert ist. (IV.52) und (IV.53) sind analytische Funktionen der Kopplungskonstanten g . Für positive Zeiten stimmt (IV.53) mit ψ_+ , für negative mit ψ_- überein, wie es die Definition des T-Produkts erfordert. Zudem besitzt gemäß Theorem 4 $\psi_z(p) = \mathcal{T} \psi_z(\pm x)$ die Wachstumsordnung $\frac{4}{3} < \frac{4}{2}$ und ist im Bereich $p^2 \geq 0$, $p^0 \geq 0$ konzentriert.

Die Methode B der komplexen Erweiterung liefert die Faltungsgleichung

$$(IV.54) \quad \psi_{F, \text{eukl.}}(x) = 1 + g \Delta_F(x', 0) * V_F(x') \psi_{F, \text{eukl.}}(x)$$

mit der am Ursprung exponentiell verschwindenden Lösung⁹⁾

$$(IV.55) \quad \psi_{F, \text{eukl.}}(x) = \exp \left(\frac{i}{x'^2} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-i \frac{1}{11} x'^2}} \right)$$

Für den Grenzwert (III.66), (III.71) ergeben sich je nach Reihenfolge der Limesbildung verschiedene Ergebnisse:

$$(IV.56) \quad \psi_{F_1}(x) = \lim_{x'^2 \rightarrow \sqrt{i+0}} \lim_{x'^2 \rightarrow \sqrt{i+0}, \ell=1,2,3} \psi_{F, \text{eukl.}}(x) = \exp \left(\frac{\sqrt{g}}{x' - i0} \right)$$

$$(IV.57) \quad \psi_{F_2}(x) = \lim_{x'^2 \rightarrow \sqrt{-i+0}, \ell=1,2,3} \lim_{x'^2 \rightarrow \sqrt{i+0}} \psi_{F, \text{eukl.}}(x) = \exp \left(\frac{-\sqrt{g}}{x' - i0} \right)$$

(IV.56) hätte man auch durch euklidische Rotation in x^0 , (IV.57) durch Rotation in $\vec{x}$ erhalten können. Linearkombination der zwei Resultate liefert

$$(IV.58) \quad \cosh \frac{\sqrt{g}}{x' - i0} + A \sinh \frac{\sqrt{g}}{x' - i0}$$

mit beliebigem A. Dasselbe Resultat folgt aus der zugehörigen Differentialgleichung

$$(IV.59) \quad \square \varphi_F(x) = g V_F(x) \varphi_F(x)$$

und der Bedingung

$$(IV.60) \quad \varphi_F(x) \rightarrow \varphi_{F_m}(x), \quad x^0 \rightarrow -\infty.$$

Eine weitere Randbedingung (etwa für das Verhalten am Ursprung), die die Konstante A festlegen würde, läßt sich nicht angeben ((12)). Für A=0 (was einer symmetrischen Linearkombination mit gleichgroßen Koeffizienten für φ_{F_1} und φ_{F_2} entspricht) erhält man wieder (IV.53). Neben der lokal integrierbaren Lösung (IV.55) von (IV.54) gibt es die iterativ zu berechnende Distributionslösung

$$(IV.61) \quad \varphi_{F_{\text{all}}}(x) = \cosh \left(\frac{i}{x'^2} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-i \frac{1}{T} d^{(1)}}} \right)$$

(cosh ist durch seine Potenzreihe definiert), die im Limes (III.71) zu (IV.53) zurückführt.

Methode C aus Kap. III liefert die Gleichung

$$(IV.62) \quad \varphi_F(x) = 1 + g \int dy \Delta_F(x-y, 0) V_F(y) \varphi_F(y)$$

mit

$$(IV.63) \quad V_F(x) = -4\pi^4 \text{Tr} \{ S_{F_1}(x, 0)^T S_{F_2}(-x, 0)^T \} = \frac{4x'}{x'^2 - i\varepsilon},$$

$$S_{F_1}(x, 0) = \frac{1}{4i\pi^2} (-i\delta_0) \frac{1}{x'^2 - i\varepsilon}.$$

Die Lösung ist

$$(IV.64) \quad \varphi_F(x) = \frac{x' - i\varepsilon}{x'^2} \sin \frac{\sqrt{g} x'}{\varepsilon \sqrt{x'^2 - i\varepsilon}} \bigg/ \sin \frac{\sqrt{g}}{\varepsilon}.$$

Für $\varepsilon > 0$ besitzt sie keine wesentliche Singularität am Lichtkegel $x^2=0$, entsprechend der Tatsache, daß (IV.62) eine regularisierte, Fredholm'sche Integralgleichung darstellt. Der Limes $\varepsilon \rightarrow +0$ (entlang der reellen Achse) existiert jedoch nicht. Es läßt sich aber zeigen, daß die Funktionen

$$(IV.65) \quad \varphi_{F_{1,2}}(x) = \frac{x' - i\varepsilon}{x'^2} \exp \left(\frac{\pm \sqrt{g}}{x'^2 - i\varepsilon} \right)$$

die Integralgleichung (IV.62) bis auf $\mathcal{O}(\varepsilon)$ erfüllen:

$$(IV.66) \quad \varphi_{F_{1,2}}(x) = 1 + g \int dy \Delta_F(x-y, 0) V_F(y) \varphi_{F_{1,2}}(y) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$(IV.67) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{O}(\epsilon) = 0 \quad \text{für } x' \neq 0.$$

Methode C führt also im Fall a) zu keiner Lösung, im Fall b) liefert sie wieder (IV.56) und (IV.57) und damit auch jede Linearkombination der Form (IV.58) mit beliebigem A.

Aus den Lösungen für die Bethe-Salpeter-Amplitude berechnen sich die Diskontinuitäten der zugehörigen T-Matrix-Elemente

$$(IV.68) \quad i \tau(p) = \int dx e^{ip'x} V_F(x) \psi_F(x)$$

(vgl. Anhang V), also die Beiträge zum Wirkungsquerschnitt wie folgt: Für (IV.53) erhält man

$$(IV.69) \quad \text{disc } \tau(p') = 2i \pi^3 g \sum_0^{\infty} \left(\frac{g}{16}\right)^n \frac{1}{(2n)!(2n+1)!(2n+2)!} (p'')^{2n+1} \theta(p''),$$

für (IV.56), (IV.57)

$$(IV.70) \quad \text{disc } \tau_{1,2}(p') = 2i \pi^3 g \sum_0^{\infty} \left(\frac{\pm \sqrt{g}}{4}\right)^n \frac{1}{n!(n+1)!(n+2)!} (p'')^{n+1} \theta(p'')$$

und demzufolge für (IV.58)

$$(IV.71) \quad \frac{1}{2} (1+A) \text{disc } \tau_1(p') + \frac{1}{2} (1-A) \text{disc } \tau_2(p').$$

Andrerseits läßt sich durch Anwenden der Cutkosky-Regel auf die Diagramme der Fig. 8 und die zugehörige Gleichung (IV.24) unmittelbar eine Integralgleichung für $\text{disc } \tau$ gewinnen: Zunächst leitet man aus (IV.24) durch Fouriertransformation die Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$(IV.72) \quad i \tau(p') = g V_F(p') - \frac{g}{(i\pi)^4} V_F(p') + \frac{i \tau(p')}{p'^2 + i0}$$

und daraus durch Berechnung der Diskontinuität die iterierbare Gleichung

$$(IV.73) \quad \theta(p'') \text{disc } \tau(p') = ig \pi^3 p'' \theta(p'') \theta(p'') + g \pi^3 p'^2 \theta(p'') \theta(p'') + \frac{\theta(p'') \text{disc } \tau(p')}{p'^2}$$

ab. Wegen

$$(IV.74) \quad \pi^3 p'^2 \theta(p'') \theta(p'') + \frac{(p'')^{2n-2} \theta(p'') \theta(p'')}{(2n-2)!(2n-1)!} = \frac{1}{16} \frac{(p'')^{2n+1} \theta(p'') \theta(p'')}{(2n+1)!(2n+2)!}$$

ist die Lösung gegeben durch

$$(IV.75) \quad \theta(p'') \text{disc } \tau(p') = 2i \pi^3 g \sum_0^{\infty} \left(\frac{g}{16}\right)^n \frac{1}{(2n)!(2n+1)!(2n+2)!} (p'')^{2n+1} \theta(p'') \theta(p''),$$

die nur mit (IV.69) übereinstimmt. Ähnlich wie beim Propagator (IV.49) gilt dabei

$$(IV.76) \quad i \Theta(p'') \text{div } \tau(p') = g F(V_+(x) \psi_+(x))$$

Wir stellen also fest, daß die Lösungsmethoden A und B b), die für die Bethe-Salpeter-Amplitude Distributionsiterationsreihen liefern, auch mit der Cutkosky-Regel in Einklang stehen, während dies bei allen Versuchen, Gleichungen für T-Produkte als klassische oder Grenzfälle klassischer Gleichungen zu interpretieren, nicht der Fall ist. Doch ist zu beachten, daß - im Gegensatz zu Halperns Behauptung - in unserem Fall aus der Unitarität der S-Matrix allein keine Entscheidung über die Richtigkeit der Lösungen folgt. Aus ihr ergibt sich nämlich nur, daß auf der Massenschale

$$(IV.77) \quad \text{Im} \left\{ \tilde{u}_+^{s_1}(\vec{p}_1) t(p) u_-^{s_2}(\vec{p}_2) \right\}$$

positiv definit sein muß, was aber für die Teilamplitude τ keine Bedingung liefert. Auch Halperns Identifikation der Bethe-Salpeter-Amplitude für $P=0$ mit Propagatoren (woraus sich eine Positiv-Definitheitsbedingung ableiten ließe), ist wegen

$$(IV.78) \quad \lim_{P \rightarrow 0} | \bar{A}_m^{(2)} A_m^{(1)} > + | 0 >$$

nicht gerechtfertigt. Dies ist schon für freie Felder offensichtlich, da

$$(IV.79) \quad \lim_{P \rightarrow 0} \chi_{F_m}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \sqrt{\frac{m_A}{E(\vec{p})}} \sqrt{\frac{m_A}{E(\vec{p})}} u_+^{s_1}(\vec{p}) \tilde{u}_-^{s_2}(\vec{p}) e^{-ip(x-y)} \\ + i S_F(x-y, m_A^2) = < 0 | T \psi_A(x) \bar{\psi}_A(y) | 0 >$$

gilt.

V. Nichtrelativistische singuläre Wechselwirkungen

1. Definition und Eigenschaften des regulären äquivalenten Potentials

Erfolgt die Wechselwirkung zweier Teilchen durch Austausch eines Partikels, das durch den Propagator

$$(V.1) \quad \Delta_F'(x) = \int dx' f(x') \Delta_F(x, x')$$

beschrieben wird, so ist das resultierende statische Potential $V(r)$ ($r=|\vec{x}|$) zwischen den Teilchen das Zeitintegral über den Propagator:

$$(V.2) \quad V(r) = \int dx' \Delta_F'(x).$$

Wegen

$$(V.3) \quad \int dx' \Delta_F(x, x') = \frac{e^{-x^2}}{4\pi x}$$

ergibt sich

$$(V.4) \quad V(r) = \int dx' f(x') \frac{e^{-x^2}}{4\pi x}.$$

Der nichtrelativistische Grenzfall ist im Impulsraum nämlich durch

$$(V.5) \quad \frac{p^0}{|\vec{p}|} \rightarrow 0$$

gegeben, was im Ortsraum (V.2) liefert.

Der Einschränkung (II.24), (II.25) für das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion zufolge konvergiert (V.4) für $r \neq 0$, so daß die übliche Darstellung von $V(r)$ durch Superposition von Yukawapotentialen auch für nichtrenormierbare Theorien gewährleistet ist. Für

$$(V.6) \quad f(x') = f^{(\lambda)}(x') = \frac{1}{4\pi^{\lambda-1}(\lambda-2)!(\lambda-1)!} (x')^{\lambda-2} \Theta(x'),$$

$$\Delta_F'(x) = \frac{i}{4\pi^{\lambda}} D_F^{(\lambda)}(x) = \frac{i}{4\pi^{\lambda}} \left(\frac{-1}{x^2-i0} \right)^{\lambda}$$

(vgl. (III.2), (III.8)) erhält man aus der Laplacetransformation (V.4):

$$(V.7) \quad V(r) = \frac{(\lambda - \frac{3}{2})!}{\sqrt{\pi} (\lambda-1)!} V^{(\lambda)}(r),$$

$$(V.8) \quad V^{(\lambda)}(r) = \frac{1}{4\pi r^{2\lambda-1}}.$$

Für

$$(V.9) \quad \rho(x') \sim (x')^{\lambda-2} \log^m(x'/\mu) \theta(x'), \quad x \rightarrow \infty, m=0,1,\dots$$

ergibt sich

$$(V.10) \quad V(r) \sim \frac{1}{r^{2\lambda-1}} \log^m(\mu r), \quad r \rightarrow 0.$$

Mit Ausnahme superrenormierbarer Theorien, für die ρ durch $(x')^{\lambda-2}$, $\text{Re } \lambda < 2$, beschränkt ist, stellt also $V(r)$ ein singuläres, d.h. am Ursprung nicht integrables Potential dar.

Wir definieren in diesem Fall das zu V "äquivalente reguläre Potential" $V_R(r)$ folgendermaßen:

- a) V_R stimmt mit V überall außerhalb des Ursprungs $r=0$ überein.
D.h. es ist

$$(V.11) \quad \int d^3\vec{x} V_R(r) \psi_s(\vec{x}) = \int d^3\vec{x} V(r) \psi_s(\vec{x})$$

für alle Testfunktionen ψ_s , die mitsamt einer genügend hohen Zahl ihrer Ableitungen am Ursprung verschwinden, so daß $V\psi_s$ integrierbar ist. Für die Potentiale (V.8), (V.10) gilt (V.11) für alle ψ_s mit

$$(V.12) \quad \Delta^i \psi_s(0) = 0, \quad i=0,1,\dots, [\lambda]-2$$

($[\lambda]$ ist bei Formel (III.16) definiert).

- b) V_R besitzt eine Fouriertransformierte $V_R(\vec{p})$.
c) V_R ist wie V rotationssymmetrisch.

Durch diese Bedingungen ist $V_R(r)$ bis auf eine endliche Linearkombination von Ableitungen der δ -Funktion

$$(V.13) \quad \sum_{i=0}^{[\lambda]-2} d_i' \Delta^i \delta^3(\vec{x})$$

mit beliebigen endlichen Koeffizienten d_i' bestimmt, im allgemeinen Fall einer Summe von Termen der Art (V.10) bis auf einen am Ursprung lokalisierten Zusatzterm

$$(V.14) \quad L_s(\vec{x}) = \sum_n d_n' \Delta^n \delta^3(\vec{x})$$

mit der zum relativistischen Fall (II.18) analogen Bedingung

$$(V.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(2n)!} d_n' = 0$$

für die Koeffizienten d_n' .

Für eine beliebige Testfunktion ψ_s setzen wir im Fall (V.8) und (V.10):

$$(V.16) \quad V_R(\tau) \langle \psi_s(\vec{x}) \rangle = \int d\vec{x} V_R(\tau) \psi_s(\vec{x}) = \\ = \int d\vec{x} V(\tau) \left\{ \psi_s(\vec{x}) - \sum_0^{[\lambda]-2} \frac{\tau^{2i}}{(2i+1)!} \Delta^i \psi_s(0) \right\},$$

$$(V.17) \quad \gamma_i = \begin{cases} \Theta(a-\tau), a > 0, \text{ falls } \int d\vec{x} V(\tau) \tau^{2i} \text{ im Unendlichen diver-} \\ \text{gieren w\u00fcrde,} \\ 1 \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir haben also gen\u00fcgend viele Glieder der Taylorreihe der \u00fcber die Kugeloberfl\u00e4che $\vec{x}^2=r^2$ gemittelten Funktion

$$(V.18) \quad S_{\psi_s}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\vec{x}} \psi_s(\vec{x}) = \\ = \sum_0^{[\lambda]-2} \frac{\tau^{2i}}{(2i+1)!} \Delta^i \psi_s(0) + o(\tau^{2[\lambda]-4})$$

abgezogen, um die rechte Seite von (V.16) konvergent zu machen. Bei nicht singul\u00e4rem V, d.h. f\u00fcr $\text{Re } \lambda < 2$, ist die Summe in (V.16) leer, die Subtraktionsterme sind also wegzulassen. Wegen (V.18) l\u00e4\u00dft sich V_R auch folgenderma\u00dfen darstellen:

$$(V.19) \quad V_R(\tau) \langle \psi_s(\vec{x}) \rangle = \\ = 4\pi \int_0^\infty d\tau \tau^2 V(\tau) \left\{ S_{\psi_s}(\tau) - \sum_0^{[\lambda]-2} \frac{\tau^{2i}}{(2i)!} S_{\psi_s}^{(2i)}(0) \right\}.$$

Das durch (V.16) bzw. (V.19) definierte regul\u00e4re Potential V_R gen\u00fcgt offensichtlich den Bedingungen a) und c). Auch b) ist erf\u00fcllt, da sich die Fouriertransformierte von $V_R(r)$ durch die Wahl

$$(V.20) \quad \psi_s(\vec{x}) = e^{-i\vec{p}\vec{x}}$$

ergibt:

$$(V.21) \quad V_R(\vec{p}) = V_R(\tau) \langle e^{-i\vec{p}\vec{x}} \rangle.$$

Umformen von (V.16) f\u00fcr $V=V^{(\lambda)}$ liefert die Identit\u00e4t

$$(V.22) \quad V_R^{(\lambda)}(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ V^{(\lambda)}(\tau) \Theta(\tau - \epsilon) + \right. \\ \left. + \sum_0^{[\lambda]-2} \frac{\epsilon^{2i-2\lambda+4}}{(2i+1)!(2i-2\lambda+4)!} \Delta^i V^{(2i)}(\tau) \right\}$$

f\u00fcr $\lambda \neq 2, 3, \dots$. F\u00fcr die ganzen λ -Werte

$$(V.23) \quad \lambda = n, n = 2, 3, \dots$$

ist der letzte Summand in (V.22) durch

$$(V.24) \quad \frac{\log \bar{a}/a}{(2n-3)!} \Delta^{n-2} \delta^3(\vec{x})$$

zu ersetzen. (V.22) zeigt die physikalische Bedeutung von V_R : Die Subtraktion des Multipolterms $-\sum \dots \Delta^i \delta^3(\vec{x})$ kompensiert die Singularität des Potentials, so daß V_R am Ursprung integrierbar wird.

Der Willkür in der Wahl des Skalenparameters a entspricht im Fall der ganzen λ -Werte (V.23) eine Unbestimmtheit von $V_R(r)$ bis auf einen zu $\Delta^{n-2} \delta^3(\vec{x})$ proportionalen Term, wie aus (V.24) hervorgeht:

$$(V.25) \quad V_R^{(\lambda)}(\vec{r})|_a - V_R^{(\lambda)}(\vec{r})|_{\bar{a}} = \begin{cases} \frac{\log \bar{a}/a}{(2n-3)!} \Delta^{n-2} \delta^3(\vec{x}) & \text{für } \lambda = n, n-2, 3, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. auch den relativistischen Fall (AII.39)). Diese bleibt somit völlig im Rahmen der Unbestimmtheit (V.13). Doch ist die spezielle Definition (V.16) gegenüber der allgemeinen Gestalt von V_R dadurch ausgezeichnet, daß nur ein einziger willkürlicher Parameter a auftritt, während es bei der allgemeinen Form von V_R gemäß (V.13) je nach Singularitätsgrad verschieden viele, u.U. (vgl. (V.14)) sogar unendlich viele sein können.

Mit (V.21) erhalten wir für die Fouriertransformierten:

$$(V.26) \quad V_R^{(\lambda)}(\vec{p}) = \frac{\sqrt{\pi} (-\lambda+1)!}{4^{\lambda-1} (\lambda-\frac{3}{2})!} (\vec{p}^2)^{\lambda-2} = \frac{-\pi^{3/2}}{4^{\lambda-1} (\lambda-\frac{3}{2})! (\lambda-2)! \Gamma(n-\lambda)} (\vec{p}^2)^{\lambda-2}$$

für $\lambda \neq 2, 3, \dots$ und

$$(V.27) \quad V_R^{(n)}(\vec{p}) = \frac{\sqrt{\pi} (-1)^{n-1}}{4^{n-1} (n-\frac{3}{2})! (n-2)!} (\vec{p}^2)^{n-2} \left[\log\left(\frac{a^2 \vec{p}^2}{4}\right) - 4(n-\frac{1}{2}) - 4(n-1) \right]$$

für $n=2, 3, \dots$

Um den Zusammenhang von V_R mit analytischer Fortsetzung in herzustellen, beweisen wir

Theorem 5: $V_R^{(\lambda)}(r)$ und seine Fouriertransformierte $V_R^{(\lambda)}(\vec{p})$ stimmen mit der analytischen Fortsetzung des Potentials $V^{(\lambda)}(r)$ bzw. $V^{(\lambda)}(\vec{p})$ von Werten $1 < \text{Re } \lambda < 2$ in die ganze komplexe λ -Ebene überein mit

Ausnahme der Punkte (V.23). Für diese Werte ist $V_R^{(\lambda)}$ die analytische Fortsetzung des regulären Anteils der Laurententwicklung von $V^{(\lambda)}$ um die Pole $\lambda = n$. D.h. wir haben folgende Relationen zu beweisen:

$$(V.28) \quad \oint d^3\vec{x} V_R^{(\lambda)}(\tau) \psi_s(\vec{x}) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \oint d^3\vec{x} V^{(\lambda)}(\tau) \left(\frac{a^2}{\tau^2}\right)^z \psi_s(\vec{x}),$$

$$(V.29) \quad V_R^{(\lambda)}(\vec{p}) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \oint d^3\vec{x} V^{(\lambda)}(\tau) \left(\frac{a^2}{\tau^2}\right)^z e^{-i\vec{p}\vec{x}} = \\ = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} V^{(\lambda+z)}(\vec{p}) a^{2z}.$$

(V.28) und (V.29) sind analog zu (III.21) zu interpretieren.

Zum Beweis gehen wir aus von der für $1 \leq \operatorname{Re}(\lambda+z) < 2$ gültigen Identität

$$(V.30) \quad \oint d^3\vec{x} V^{(\lambda)}(\tau) \left(\frac{a^2}{\tau^2}\right)^z \psi_s(\vec{x}) = \\ = a^{2z} \int_0^a d\tau \tau^{-2\lambda-2z+3} \left\{ \psi_s(\tau) - \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \frac{\tau^{2i}}{(2i+1)!} \Delta^i \psi_s(0) \right\} + \\ + a^{2z} \int_a^\infty d\tau \tau^{-2\lambda-2z+3} \psi_s(\tau) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a^{2i-2\lambda+4}}{(2i+1)! (2i-2\lambda-2z+4)} \Delta^i \psi_s(0), \\ m = 0, 1, \dots$$

($m=0$ bedeutet, daß die Subtraktionsterme wegzulassen sind.) Die linke Seite von (V.30) ist analytisch für $1 \leq \operatorname{Re}(\lambda+z) < 2$, die rechte dagegen existiert in dem Streifen $1 \leq \operatorname{Re}(\lambda+z) < m+2$ für nichtganze $\lambda+z$ und definiert somit die analytische Fortsetzung der linken Seite außer für die Werte $\lambda+z = n$, $n=2, 3, \dots$, wo einfache Pole mit dem Residuum

$$(V.31) \quad \operatorname{Res}_{z=0} \oint d^3\vec{x} V^{(\lambda)}(\tau) \left(\frac{a^2}{\tau^2}\right)^z \psi_s(\vec{x}) = \\ = \operatorname{Res}_{\lambda=n} \oint d^3\vec{x} V^{(\lambda)}(\tau) \psi_s(\vec{x}) = - \frac{1}{2(2n-3)!} \Delta^{n-2} \psi_s(0)$$

vorliegen. Wählt man $m=[\lambda]-1$, so erhält man wegen

$$(V.32) \quad \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{[\lambda]-2} \frac{a^{2i-2\lambda+4}}{(2i+1)! (2i-2\lambda-2z+4)} \Delta^i \psi_s(0) = \\ = - \int_0^a d\tau \tau^{-2\lambda+3} \sum_{i=0}^{[\lambda]-2} \gamma_i \frac{\tau^{2i}}{(2i+1)!} \Delta^i \psi_s(0)$$

die Behauptung durch Residuenbildung aus (V.30). Die Faktoren sind dabei für $V=V^{(\lambda)}$ nach (V.17) gegeben durch

$$(V.33) \quad \gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i < [\lambda]-2, \\ 1 & \text{für } \lambda+2, 3, \dots \\ \theta(\lambda-1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(V.29) ergibt sich wegen (V.21) aus dem ersten Teil der Behauptung. Durch Differentiation von (V.28), (V.29) nach λ lassen sich entsprechende Ergebnisse auch für Potentiale mit logarithmischen Gliedern (V.10) erhalten.

Theorem 5 liefert den Zusammenhang mit dem relativistischen Fall. Nach (V.6) gehört zur Spektralfunktion $\rho^{(\lambda)}$ der Propagator

$$(V.34) \quad \frac{i}{4\pi} D_F^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \frac{i}{4\pi} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int dx D_F^{(\lambda+z)}(x) \alpha^{2z} \varphi(x) = \frac{i}{4\pi} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int dx \left(\frac{-1}{x^2-i0} \right)^{\lambda} \left(\frac{-a^2}{x^2-i0} \right)^z \varphi(x).$$

Für den nichtrelativistischen Grenzfall, der für die im Minkowskiraum definierten Testfunktionen $\varphi(x)$ den Grenzübergang

$$(V.35) \quad \varphi(x) \longrightarrow \varphi_s(\vec{x})$$

zu den "statischen" Testfunktionen des dreidimensionalen Raums bedeutet, erhält man somit:

$$(V.36) \quad \begin{aligned} \frac{i}{4\pi} D_F^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle &\longrightarrow \frac{i}{4\pi} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int d^3\vec{x} \int dx^0 D_F^{(\lambda+z)}(x) \alpha^{2z} \varphi_s(\vec{x}) = \\ &= \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \frac{(\lambda+z-\frac{3}{2})!}{\sqrt{\pi} (\lambda+z-1)!} \int d^3\vec{x} V_{(\tau)}^{(\lambda)} \left(\frac{a^2}{\tau^2} \right)^z \varphi_s(\vec{x}) = \\ &= \frac{(\lambda-\frac{3}{2})!}{\sqrt{\pi} (\lambda-1)!} \left\{ V_R^{(\lambda)}(\tau) + [\varphi(\lambda-\frac{1}{2}) - \varphi(\lambda)] \operatorname{Res}_{z=0} V^{(\lambda+z)}(\tau) \right\} \langle \varphi_s(\vec{x}) \rangle. \end{aligned}$$

Für nichtganze λ ist der Residuenterm im letzten Ausdruck gleich Null, so daß

$$(V.37) \quad \frac{(\lambda-\frac{3}{2})!}{\sqrt{\pi} (\lambda-1)!} V_R^{(\lambda)}(\tau)$$

genau das Zeitintegral von $\frac{i}{4\pi} D_F^{(\lambda)}(x)$ darstellt, während dies für die ganzen λ -Werte (V.23) nur bis auf einen Term proportional zu $\Delta^{n-2} \int d^3(\vec{x})$ der Fall ist, der aber völlig innerhalb der Unbestimmtheit (V.25) bleibt und durch geeignete Wahl des Skalensparameters a zum Verschwinden gebracht werden kann. In der Impulsraumdarstellung ist also nach (V.36)

$$(V.38) \quad \begin{aligned} \frac{i}{4\pi} D_F^{(\lambda)}(p) |_{p^0=0} = \\ = \frac{(\lambda-\frac{3}{2})!}{\sqrt{\pi} (\lambda-1)!} \left\{ V_R^{(\lambda)}(\vec{p}) + [\varphi(\lambda-\frac{1}{2}) - \varphi(\lambda)] \operatorname{Res}_{z=0} V^{(\lambda+z)}(\vec{p}) \right\} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (AII.32), (AII.34).

Nach Kap. III unterscheidet sich die allgemeinste mögliche Definition von $D_F^{(\lambda)}(x)$ von der in (III.20) gegebenen um den Term (III.22) und somit wegen (V.36) die allgemeine Form von $V_R^{(\lambda)}(r)$ von der in (V.16) gegebenen um das Zeitintegral von (III.22) (abgesehen von einem konstanten Faktor), nämlich um

$$(V.39) \quad \frac{i}{4\pi^2} \frac{\sqrt{\lambda}(\lambda-1)!}{(\lambda-\frac{3}{2})!} \sum_0^{[\lambda]-2} d_i (-\Delta)^i \int^3(\vec{x}) - [4(\lambda-\frac{1}{2}) - 4(\lambda)] \lim_{z \rightarrow 0} V_{(r)}^{(\lambda+z)} = \\ = \sum_0^{[\lambda]-2} d_i' \Delta^i \int^3(\vec{x})$$

in Übereinstimmung mit (V.13).

Für Potentiale $V^{(\lambda)}$ ist die Kopplungskonstante g die einzige Größe, die die Dimension der Potenz einer Länge besitzt:

$$(V.40) \quad \dim g = cm^{\frac{1}{2}}$$

Den Skalenparameter kann man also durch g ausdrücken:

$$(V.41) \quad a = \Lambda g^{\frac{4}{3}},$$

wobei Λ einen dimensionslosen Parameter darstellt. In Zusammenhang damit steht die Tatsache, daß $V_R^{(\lambda)}(r)$ - im Gegensatz zu $V^{(\lambda)}(r)$ - nicht mehr notwendig skaleninvariant ist, wenn man a festhält:

$$(V.42) \quad V_R^{(\lambda)}(a\tau) = a^{-2\lambda+1} \left\{ V_R^{(\lambda)}(\tau) - 2 \log a \cdot \lim_{z \rightarrow 0} V_{(r)}^{(\lambda+z)} \right\} = \\ = \begin{cases} a^{-2\lambda+1} V_R^{(\lambda)}(\tau) & \text{für } \lambda = 2, 3, \dots \\ a^{-2m+1} \left\{ V_R^{(m)}(\tau) + \frac{\log a}{(2m-3)!} \Delta^{m-2} \int^3(\vec{x}) \right\} & \text{für } \lambda = m, m=2, 3, \dots \end{cases}$$

Mit variablem a jedoch läßt sich die Skaleninvarianz aufrechterhalten:

$$(V.43) \quad V_R^{(\lambda)}(a\tau) \Big|_{a} = a^{-2\lambda+1} V_R^{(\lambda)}(\tau) \Big|_a.$$

Daneben besitzt $V_R^{(\lambda)}(r)$ die weitere bemerkenswerte Eigenschaft, nur bedingt positiv zu sein. D.h. für $\psi_s \gg 0$ ist nicht notwendig

$$(V.44) \quad \int d^3\vec{x} V_R^{(\lambda)}(\vec{x}) \psi_s(\vec{x}) > 0.$$

Doch ist (V.44) erfüllt, falls

$$(V.45) \quad \Delta^i \psi_s(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, [\lambda]-2$$

gilt.

Zu diesen beiden Eigenschaften von $V_R^{(\lambda)}$ gibt es relativistische Analogien: Auch $D_F^{(\lambda)}(x)$ ist bei festem λ nicht notwendig skaleninvariant:

$$(V.46) \quad D_F^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} \alpha^{-2\lambda} D_F^{(\lambda)}(x) & \text{für } \lambda = 2, 3, \dots \\ \alpha^{-2n} \left\{ D_F^{(n)}(x) - \frac{i\pi^2 \log \alpha^2}{4^{n-1}(n-2)!(n-1)!} (-\square)^{n-2} \delta^4(x) \right\} & \text{für } \lambda = n, \\ & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Dagegen ist

$$(V.47) \quad D_F^{(\lambda)}(x)|_{\alpha a} = \alpha^{-2\lambda} D_F^{(\lambda)}(x)|_a$$

Weiter ist die dem T-Produkt $D_F^{(\lambda)}(x)$ zugeordnete Schwingerfunktion ((13))

$$(V.48) \quad \left[\sum_i \langle x_i^2 \rangle \right]^{-\lambda} = D_F^{(\lambda)}(x)_{x^0 \rightarrow -ix^4}$$

nur bedingt positiv.

2. Verallgemeinerte Lippmann-Schwinger-Gleichung und analytische Fortsetzung im Drehimpuls 1

Wir gehen aus von der Schrödingergleichung für Potentialstreuung (Fig. 9)

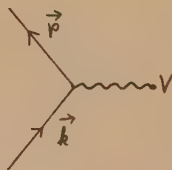


Fig. 9

$$(V.49) \quad \psi(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\vec{x}} + g \int d^3\vec{y} K(\vec{x}-\vec{y}) V(\vec{y}) \psi(\vec{y}); \quad \gamma = |\vec{y}|$$

mit der Greenfunktion

$$(V.50) \quad K(\vec{x}) = -\frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{4\pi x}; \quad k = |\vec{k}|$$

Die Streuamplitude $t(\vec{p}, \vec{k})$ ist gegeben durch das nichtrelativistische Analogon von (IV.68) bzw. (AV.23):

$$(V.51) \quad t(\vec{p}, \vec{k}) = g \int V(r) \psi(\vec{r}) = g \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{p}\vec{x}} V(r) \psi(\vec{r}).$$

Da $\psi(\vec{r})$ für singuläre, am Ursprung repulsive Potentiale mit all seinen Ableitungen bei $\vec{r}=0$ verschwindet ((9)), läßt sich in den Gleichungen (V.49), (V.51) $V\psi$ durch $V_R\psi$ ersetzen. Also ist

$$(V.52) \quad t(\vec{p}, \vec{k}) = t_R(\vec{p}, \vec{k}) = g \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{p}\vec{x}} V_R(r) \psi(\vec{r}).$$

Nach Definition besitzt $V_R(r)$ eine Fouriertransformierte, so daß wir wegen (V.52) die auf den Fall singulärer Potentiale verallgemeinerte Lippmann-Schwinger-Gleichung durch Fouriertransformation von (V.49) erhalten, wobei wir V durch V_R zu ersetzen haben¹⁰⁾:

$$(V.53) \quad t_R(\vec{p}, \vec{k}) = g V_R(\vec{p} - \vec{k}) + \frac{g}{(\pi)^3} \int d^3\vec{p}' V_R(\vec{p} - \vec{p}') \frac{t_R(\vec{p}', \vec{k})}{k' - p' - i0} \quad p = |\vec{p}|, \quad p' = |\vec{p}'|.$$

Für reguläre Potentiale stimmt (V.53) natürlich mit der gewöhnlichen Lippmann-Schwinger-Gleichung ((15)) überein. Durch formale Rechnung hätten wir (V.53) mit $V(\vec{p} - \vec{p}')$ statt $V_R(\vec{p} - \vec{p}')$ erhalten, doch ist diese Gleichung im Fall singulärer Potentiale sinnlos, da $V(r)$ nicht fouriertransformierbar ist.

Wegen der Unbestimmtheit von $V_R(r)$ bis auf einen am Ursprung lokalisierten Summanden $L_s(\vec{x})$ aus (V.13) bzw. (V.14) ist $t(\vec{p}, \vec{k}) = t_R(\vec{p}, \vec{k})$ definiert bis auf einen Term

$$(V.54) \quad g \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{p}\vec{x}} L_s(\vec{x}) \psi(\vec{x}),$$

der aber wegen

$$(V.55) \quad \Delta^i \psi(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

verschwindet, so daß t eindeutig ist. Zugleich ist dadurch sichergestellt, daß der willkürliche Skalenparameter a bzw. Λ ohne Einfluß auf Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt ist.

Für

$$(V.56) \quad V = V^{(\lambda)}, \quad 2\lambda - 1 = 2, 4, 6, \dots$$

also für Potentiale der Form

$$(V.57) \quad \frac{1}{4\pi r^{2m}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

entspricht (V.53) einer Differentialgleichung endlicher Ordnung

im Impulsraum. Wegen

$$(V.58) \quad r^{2\lambda-1} V_R^{(\lambda)}(r) = 4\pi$$

ist

$$(V.59) \quad (-\Delta_{\vec{p}})^{\frac{2\lambda-1}{2}} V_R^{(\lambda)}(\vec{p}) = 2\pi' \delta^3(\vec{p})$$

und somit

$$(V.60) \quad \left\{ \frac{1}{2\pi'} (-\Delta_{\vec{p}})^{\frac{2\lambda-1}{2}} - \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - p^2 - i0} \right\} t(\vec{p}, \vec{k}) = g \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$$

Für $g > 0$, d.h. repulsives Potential, lauten die Randbedingungen: t muß regulär am Ursprung $\vec{p}=0$ sein und für $p \rightarrow \infty$ hinreichend stark abfallen, damit die rechte Seite von (V.53) existiert. Für die übrigen λ -Werte ist (V.60) nicht von ganzer Ordnung, läßt sich also nur durch die Integralgleichung (V.53) darstellen.

Entwickeln von (V.53) und (V.60) nach Partialwellen:

$$(V.61) \quad t(\vec{p}, \vec{k}) = \frac{2\pi'}{pk} \sum_0^{\infty} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos \mathcal{D}) \tau_{\ell}(p, k),$$

$$(V.62) \quad V_R(\vec{p} - \vec{p}') = \frac{2\pi'}{pp'} \sum_0^{\infty} (2\ell'+1) P_{\ell'}(\cos \mathcal{D}') v_{\ell'}(p, p'),$$

$$(V.63) \quad \mathcal{D} = \angle(\vec{p}, \vec{k}), \quad \mathcal{D}' = \angle(\vec{p}, \vec{p}')$$

liefert unter Benutzung der Orthogonalitätsrelationen für die Kugelfunktionen die Gleichungen für die Partialamplituden τ_{ℓ} :

$$(V.64) \quad \tau_{\ell}(p, k) = g v_{\ell}(p, k) + g \int_0^{\infty} dp' v_{\ell}(p, p') \frac{\tau_{\ell}(p', k)}{k'^2 - p'^2 - i0}$$

und für $2\lambda-1 = 2, 4, 6 \dots$

$$(V.65) \quad \left\{ 4\pi \left(-\frac{d^2}{dp^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{p^2} \right)^{\frac{2\lambda-1}{2}} - g \frac{1}{k^2 - p^2 - i0} \right\} \tau_{\ell}(p, k) = g \delta(p-k)$$

Wegen (V.62) ist

$$(V.66) \quad v_{\ell}(p, p') = \frac{pp'}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\vec{p}} V_R(\vec{p} - \vec{p}') P_{\ell}(\cos \mathcal{D}')$$

Berücksichtigt man

$$(V.67) \quad \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\vec{p}} d\Omega_{\vec{p}'} e^{-i\vec{x}(\vec{p} - \vec{p}')} P_{\ell}(\cos \mathcal{D}') = \frac{1}{\sqrt{pp'}} \frac{1}{r} j_{\ell+\frac{1}{2}}(pr) j_{\ell+\frac{1}{2}}(p'r),$$

so erhalten wir für die Potentiale (V.8), (V.10):

$$\begin{aligned}
 (V.68) \quad v_e(p, p') &= \sqrt{pp'} \int_0^\infty dr r' V_R(r) \frac{1}{r} j_{\ell+1/2}(pr) j_{\ell+1/2}(p'r) = \\
 &= \sqrt{pp'} \int_0^\infty dr r' V(r) \left\{ \frac{1}{r} j_{\ell+1/2}(pr) j_{\ell+1/2}(p'r) - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=0}^{[\lambda]-2} r_i \frac{r^{2i}}{(2i)!} \frac{d^{2i}}{dr^{2i}} \left(\frac{1}{r} j_{\ell+1/2}(pr) j_{\ell+1/2}(p'r) \right) \right\}_{r=0}.
 \end{aligned}$$

Für reguläre Potentiale fallen die Subtraktionsterme weg, so daß wir die übliche Form

$$(V.69) \quad v_e(p, p') = \sqrt{pp'} \int_0^\infty dr r V(r) j_{\ell+1/2}(pr) j_{\ell+1/2}(p'r)$$

erhalten. Auch für

$$(V.70) \quad \ell > [\lambda] - 2$$

verschwinden die Subtraktionsterme. Für genügend hohen Drehimpuls ist also (V.64) mit der gewöhnlichen Lippmann-Schwinger-Gleichung für Partialwellen identisch. Die physikalische Ursache ist klar: Bei großem ℓ können auf Grund der starken Zentrifugalkraft die Teilchen nicht genügend nahe ans Streuzentrum vordringen, "spüren" also nichts von der Singularität des Potentials.

Als Funktion von ℓ ist

$$(V.71) \quad v_e^{(\lambda)}(p, p') = \sqrt{pp'} \int_0^\infty dr r' V^{(\lambda)}(r) \frac{1}{r} j_{\ell+1/2}(pr) j_{\ell+1/2}(p'r)$$

analytisch in der Halbebene $\text{Re } \ell > \text{Re } \lambda - 2$. Unter Verwendung der Abkürzung

$$(V.72) \quad T_\ell(r) = \sqrt{pp'} \frac{1}{r^{2\ell+1}} j_{\ell+1/2}(pr) j_{\ell+1/2}(p'r)$$

(T_ℓ stellt eine Potenzreihe in r^2 dar), läßt sich wegen der im Gebiet $\text{Re}(1-z) > \text{Re } \lambda - 2$ gültigen Identität

$$\begin{aligned}
 (V.73) \quad v_{e-2}^{(\lambda)}(p, p') &= \int_0^a dr r^{2\ell-2\lambda+2} V^{(\lambda)}(r) \left\{ T_{\ell-2}(r) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{r^{2i}}{(2i)!} T_{\ell-2}^{(2i)}(0) \right\} + \\
 &+ \int_0^\infty dr r^{2\ell-2\lambda+2} V^{(\lambda)}(r) T_{\ell-2}(r) + \\
 &+ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a^{2i+2\ell-2\lambda+4}}{(2i)!(2i+2\ell-2\lambda+4)} T_{\ell-2}^{(2i)}(0); \quad m=0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

die linke Seite von (V.71) analytisch in ℓ fortsetzen mit Ausnahme der Werte

(V.74)

$$l = \lambda - n, n = 2, 3, \dots$$

wo einfache Pole vorliegen. Für die physikalischen l -Werte erhält man aus (V.73)

$$(V.75) \quad v_{l-2}^{(\lambda)}(p, p') = \int_0^a dr \tau^{-2\lambda+2} V^{(\lambda)}(\tau) \left\{ \tau^{2l} T_{l-2}(\tau) - \sum_{i=0}^{m+l-1} \frac{\tau^{2i}}{(2i)!} \frac{d^{2i}}{d\tau^{2i}} \left(\tau^{2l} T_{l-2}(\tau) \right) \right\}_{\tau=0} + \\ + \int_0^\infty dr \tau^{-2\lambda+2} V^{(\lambda)}(\tau) \tau^{2l} T_{l-2}(\tau) + \\ + \sum_{i=0}^{m+l-1} \frac{a^{2i-2\lambda-2\lambda+4}}{(2i)! (2i-2\lambda-2\lambda+4)} \frac{d^{2i}}{d\tau^{2i}} \left(\tau^{2l} T_{l-2}(\tau) \right)_{\tau=0} \\ l = 0, 1, 2, \dots$$

und somit durch Vergleich mit (V.68): Für alle nichtganzen λ und alle λ mit $\text{Re} \lambda < 1 + 2^{11}$ ist

$$(V.76) \quad v_l^{(\lambda)}(p, p') = A F_{\lambda \rightarrow 0} v_{l-2}^{(\lambda)}(p, p')$$

und für $\lambda = 1 + n, n = 2, 3, \dots, l = 0, 1, 2, \dots$

$$(V.77) \quad v_l^{(n)}(p, p') = R_{\lambda 0} \frac{1}{\lambda} v_{l-2}^{(n)}(p, p') + \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{a^{-2\lambda}}{\lambda(2n-2l-4)!} T_{l-2}^{(2n-2l-4)}(0) \right)_{\lambda=0}$$

Für $\lambda \neq 1 + 2, 1 + 3, \dots$ kann man also die verallgemeinerte Lippmann-Schwinger-Gleichung für die Partialwellen $\mathcal{T}_l$ durch analytische Fortsetzung der Partialwellenprojektion $\mathcal{V}_l$ des fouriertransformierten äquivalenten regulären Potentials im Drehimpuls l erhalten.

Für $V = V^{(\lambda)}$ läßt sich $\mathcal{V}_l^{(\lambda)}$ aus (V.76), (V.77) explizit angeben:

$$(V.78) \quad 4\pi \mathcal{V}_l^{(\lambda)}(p, p') = \theta(p' - p) \frac{(\ell - \lambda + 1)!}{(\ell + \frac{1}{2})! (\lambda - \frac{3}{2})!} \frac{p^{\ell+1}}{p'^{\ell-2\lambda+3}} \cdot \\ \cdot \mathcal{T}_1(\ell - \lambda + 2, -\lambda + \frac{3}{2}, \ell + \frac{3}{2}, \frac{p}{p'}) + \overleftrightarrow{p} \overleftrightarrow{p}', \quad \lambda = \ell + 2, \ell + 3, \dots$$

($\overleftrightarrow{p} \overleftrightarrow{p}'$ ist der Austauschterm, den man erhält, wenn man im ersten Summanden von (V.78) p durch $\overleftrightarrow{p}$ ersetzt.)

$$(V.79) \quad 4\pi \mathcal{V}_l^{(n)}(p, p') = \theta(p' - p) \frac{p^{\ell+1}}{p'^{\ell-2n+3}} \left\{ \sum_{i=0}^{m+l-2} \frac{(-1)^{n-\ell}}{i! (\ell + \frac{1}{2} + i)! (n - \frac{3}{2} - i)! (n - \ell - i)!} \right. \\ \left. \left(\frac{p}{p'} \right)^i \left[\log(a^2 p'^2) - \psi(n - \ell - 1 - i) - \psi(n - \frac{1}{2} - i) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=n-\ell-1}^{\infty} \frac{(-1)^i (\ell - n + 1 + i)!}{i! (\ell + \frac{1}{2} + i)! (n - \frac{3}{2} - i)!} \left(\frac{p^2}{p'^2} \right)^i \right\} + \overleftrightarrow{p} \overleftrightarrow{p}', \quad n = \ell + 2, \ell + 3, \dots$$

VI. Zusammenfassung der Ergebnisse

Unsere Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen und ergänzen:

1) Propagatoren und Matrixelemente sind als verallgemeinerte Funktionen zu interpretieren. Für nichtrenormierbare Theorien stellen sie analytische Funktionale über dem Raum $\mathcal{Z}$ oder $\mathcal{Z}(M)$ dar. Wightmans einschränkende Annahme((16)), Impulsraummatrixelemente seien im Unendlichen durch Polynome beschränkt, also Distributionen aus $\mathcal{S}'$, ist unnötig und für nichtrenormierbare Theorien unzutreffend, da in diesem Fall wesentliche Singularitäten bei $p=\infty$ vorliegen. Nichtrenormierbare Theorien stehen keinesfalls im Widerspruch zu den Axiomen der Feldtheorie. Insbesondere sind Lokalität, Kausalität, Analytizität und Existenz der Fouriertransformierten gesichert, wenn die in Kap. II genannten Bedingungen erfüllt sind, die mit exponentiellem Wachstum der Spektralfunktionen durchaus verträglich sind. Auch Verwendung einer indefiniten Metrik im Hilbertraum der Zustände ((17)), um die Existenz der Zweipunktfunktionen zu garantieren, erweist sich als überflüssig.

2) Feynmanpropagatoren und zeitgeordnete Matrixelemente (auch retardierte und avancierte Funktionen) stellen Funktionale aus $\mathcal{Z}'$ oder $\mathcal{Z}'(M)$ dar. Sie sind definiert bis auf einen am Ursprung lokalisierten Term. Diese Unbestimmtheit hat keinen Einfluß auf physikalisch meßbare Größen, die sich aus der Diskontinuität von Impulsraummatrixelementen entlang des physikalischen Schnitts berechnen. Ihre Ursache liegt in der Willkür der Wahl eines Skalenparameters a , der aus Dimensionsgründen für die Definition singulärer Funktionale nötig ist. Für eine Theorie mit masselosen Teilchen kann er durch die Kopplungskonstante g ausgedrückt werden ($a=\Lambda g^{\frac{1}{6}}$) und steht in Zusammenhang mit der Dilatationsgruppe. Aus der Definition der Feynmanpropagatoren folgt, daß trotz wachsender Spektralfunktionen die mathematisch korrekte Form der zugehörigen Lehmannndarstellung keine Subtraktionen enthält, abweichend von der üblichen Darstellung, die für nichtrenormierbare Theorien unendlich viele Renormierungskonstanten be-

nötigen würde. Auch die Renormierungsfaktoren $Z_{2,3}^{-1}$ erweisen sich nicht wie im üblichen Formalismus als divergente Konstanten, sondern als lorentzinvariante Differentialoperatoren im x -Raum. Die (Anti-)Kommutatoren der renormierten Feldoperatoren (im Sinn von LSZ) sind bestimmt bis auf die Ableitung eines am Ursprung lokalisierten Funktionals und stellen die korrekte Verallgemeinerung der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen für Heisenbergoperatoren dar.

3) Integralgleichungen für Matrixelemente nichtrenormierbarer Theorien stellen Faltungsgleichungen verallgemeinerter Funktionen dar. Lösungsverfahren und Lösungen existieren. Divergenzen treten nicht auf. Nichtrenormierbare Theorien lassen sich innerhalb der betrachteten Näherungen (String-, Leiterapproximation) in gleicher mathematischer Strenge behandeln wie renormierbare Theorien. Die für nichtrenormierbare Theorien erhaltenen Ergebnisse sind auf renormierbare Theorien übertragbar und führen zu einer endlichen Selbstenergie des Elektrons((18)). Halperns((2)) Behauptung, nichtrenormierbare Theorien besäßen - auch im Bereich verallgemeinerter Funktionen - keine Lösungen und seien mathematisch nicht korrekt formulierbar, erweist sich als unzutreffend.

4) Integralgleichungen für nicht zeitgeordnete Funktionen sind unproblematisch, da diese Funktionale wegen des kausalen " $i\eta$ " regulär sind, d.h. keine Regularisierungsvorschrift benötigen. Iteration ist stets möglich (abgesehen von eventuellen Ultrarot-Divergenzen, die durch langreichweitige Kräfte verursacht und für die Fragestellung nichtrenormierbarer Theorien unwesentlich sind). Sie liefert analytische Lösungen in der Kopplungskonstanten g , die in jeder störungstheoretischen Ordnung den aus der Axiomatik folgenden Bedingungen genügen. Graphisch entspricht sie einer (konvergenten) Aufsummation von Wechselwirkungsdiagrammen.

5) Schroers und Bardakci((1)) Iterationsvorschlag für die Integralgleichungen der Wightmanfunktionen basiert auf der gleichen Methode, die wir für T-Produkte verwenden. Doch bewirkt

sie in ihrem Fall nicht zeitgeordneter Matrixelemente eine völlig überflüssige Komplikation des Iterationsschemas, da Wightmanfunktionen vom Typ

$$(VI.1) \quad f_+(x) \sim D_+^{(\lambda)}(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{(x-i\eta)^2} \right)^\lambda, \quad x^2 \rightarrow 0$$

nicht erst durch analytische Fortsetzung in λ bzw. durch

$$(VI.2) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \operatorname{Res}_{x=0} \frac{1}{x} f_+(x-i\eta) \left(\frac{-1}{(x-i\eta)^2} \right)^\lambda$$

definiert zu werden brauchen, sondern von vornherein analytisch in λ sind. Unzutreffend ist auch Schroers Schlußfolgerung, Funktionen der Form (VI.1) hätten Pole bei ganzen λ -Werten und die Lösungen hingen demzufolge explizit vom Skalenparameter ab. Von dem Gesichtspunkt aus sind darum alle und nicht nur - nach Schroer - solche Theorien, "bei welchen die Skalenparameterabhängigkeit durch Hinzunahme anderer Terme herausfällt", als zulässig zu bezeichnen, da diese Abhängigkeit nicht vorliegt. Weiter ist die von Halpern und Schroer gefundene Unabhängigkeit des Absorbtivteils der Vorwärtsstreuamplitude von a kein Zufall, sondern nach Kap. III selbstverständlich, da physikalische Größen - hier der Wirkungsquerschnitt - gegen Transformationen des Skalenparameters invariant sind. Schroers und Bardakcis Behauptungen über das Polverhalten und die a -Abhängigkeit von (VI.1) bei ganzen λ -Werten beruhen auf einer formalen Rotation ins Euklidische, die für Wightmanfunktionen

$$(VI.3) \quad f_+(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} f_+(x-i\eta)$$

wegen $\eta^0 > 0$ nicht erlaubt ist. Dies folgt auch aus Fig. 10, die die Pole (*) und Verzweigungsschnitte (====) von

$$(VI.4) \quad f_+(x-i\eta)$$

zeigt. Für T-Produkte

$$(VI.5) \quad f_F(-x^2+i0) = \lim_{Q_1 \rightarrow 0} f_F(-x^2+iQ_1)$$

ist Rotation möglich (vgl. Fig. 11, die Pole, Verzweigungsschnitte und mögliche Rotationsrichtung von

$$(VI.6) \quad f_F(-x^2+iQ_1)$$

in der Variablen x^0 angibt), so daß Schroers Ergebnisse über Wightmanfunktionen unzutreffend sind, während sie, auf T-Produkte übertragen, korrekt wären.

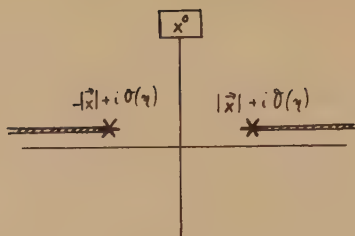


Fig. 10

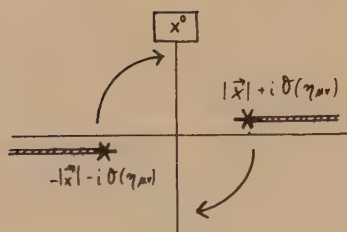


Fig. 11

6) Integralgleichungen für zeitgeordnete Matrixelemente nicht-renormierbarer Theorien sind singulär. Wegen der Unbestimmtheit am Ursprung können sie nur bis auf einen am Ort $x=0$ lokalisierten Term befriedigt werden. Die Iterationsmethode A bietet - im Gegensatz zu Schroers Behauptung - nicht mehr Schwierigkeiten als bei Wightmanfunktionen. Sie liefert definitionsgemäß in g analytische Lösungen, die allen axiomatischen Bedingungen genügen. Im Fall des Propagators einer Vier-Fermion-Theorie stellt die so erhaltene Lösung die einzige dar, die mit Positivität der Spektralfunktion und richtigem asymptotischen Verhalten für große Abstände verträglich ist. Die nach Methode A gewonnene Bethe-Salpeter-Amplitude Ψ_F genügt der Cutkosky-Regel und stimmt für positive bzw. negative Zeiten mit den Lösungen der Integralgleichungen für die nicht zeitgeordneten Zweiteilchenamplituden Ψ_+ bzw. $-\Psi_-$ überein, wie es die Definition des T-Produkts erfordert. Jeder Iterationsterm von Ψ_F entspricht einem Feynmandiagramm. Die Iterationsmethode A ist also dadurch charakterisierbar, daß sie als zweite Randbedingung (neben dem korrekten Verhalten im Unendlichen) eine Interpretationsmöglichkeit der Wech-

selwirkung und der Lösungen durch Partikelaustausch fordert.

7) Gelfands Methode der komplexen Erweiterung (Methode B) ist nach Definition zeitgeordneter Funktionen stets möglich. Ihr mathematischer Vorteil liegt in der Benutzung eines euklidischen Raums. Sie liefert jedoch i.a. mehrere Lösungen, je nach Interpretation der Integralgleichungen. Definition der Lösung durch formale Iterationsreihen führt auf die bei Methode A erhaltenen Ergebnisse. Faßt man die Integralgleichung aber als vierdimensionales Analogon zur Schrödingergleichung auf und fordert Existenz der Integrale im klassischen Sinn, so erhält man im Fall des Propagators keine, für die Bethe-Salpeter-Amplitude jedoch zwei nicht iterative Lösungen. Sie sind beide nicht analytisch in g und deshalb nicht unmittelbar durch Aufsummation von Graphen zu deuten. Interpretation der Wechselwirkung durch iterativen Teilchenaustausch ist nicht möglich. Die zugrundeliegende Randbedingung ist (wie bei der Methode der euklidischen Rotation) Regularität der Lösungen am Lichtkegel $x^2=0$ für raum- bzw. zeitartige Abstände. Regularität auf beiden Seiten des Kegels ist i.a. nicht erfüllbar; im Propagatorfall ist die Lösung sogar notwendig auf beiden Seiten singulär, wenn die Randbedingung im Unendlichen erfüllt ist. Eine Interpretation der Integralgleichungen für T-Produkte als Grenzfall ($f \rightarrow 0$) klassischer Integralgleichungen schließlich ist unbefriedigend, da der Grenzwert $f \rightarrow 0$ nicht notwendig existiert und kein mathematisch geschlossener Formalismus zugrunde liegt.

8) Die Peratisierungsmethode von Feinberg und Pais((1)) als Lösungsverfahren für ihre nichtrenormierbare Vektormesonentheorie beruht auf der Aufsummation von Graphen, die durch einen Cutoff M regularisiert wurden. In der Endlösung sollte dann der Cutoff-abhängige Anteil für $M \rightarrow \infty$ verschwinden. Diese Methode basiert auf der Vorstellung, die Ergebnisse sollten für $M \rightarrow \infty$ der zugehörigen Integralgleichung im klassischen Sinn genügen. Sie entspricht dem Verfahren der komplexen Erweiterung, wenn man dort nach klassischen Lösungen sucht und Regularität am Lichtkegel oder bei $p=\infty$ fordert. Dieses Vorgehen ist von der Axiomatik her nicht zu begründen. Tatsächlich sind für Bethe-Salpeter-Amplituden keine Randbedingungen für das Verhalten am Ursprung oder

Lichtkegel bekannt((12)). Eine Analogie zur Schrödingertheorie ist - abgesehen von der formal ähnlichen Struktur der Gleichungen - nicht vorhanden. Für die nichtrelativistische Quantenmechanik nämlich stellt $|\Psi|^2$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte dar, woraus die Regularität von Ψ am Ursprung $\vec{x}=0$ folgt. Für Streuung an singulären Potentialen ergeben sich deshalb exponentiell am Ursprung verschwindende, in g nichtanalytische Lösungen((9)). In der relativistischen Feldtheorie ist auf Grund möglicher Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Bethe-Salpeter-Amplitude nicht während der Dauer der Wechselwirkung, sondern nur für die asymptotischen ein- und auslaufenden Zustände ($x^0 = \mp \infty$) möglich. Sie liefert somit keine Aussagen über das Verhalten zeitgeordneter Zwei- oder Mehrteilchenamplituden am Ursprung oder Lichtkegel. Für die in Ref.((9)) verwendete Peratisierungsmethode läßt sich ein unmittelbarer Zusammenhang mit den in Kap. III und IV diskutierten Lösungsverfahren und Lösungen angeben, wenn man den in ((9)) definierten Peratisierungsoperator P mit dem Schwartz'schen "partie finie" identifiziert: Nur die Teilamplitude Ψ_1 aus ((9)) entspricht der formalen Iterationslösung nach Methode A, während die Gesamtlösung $\Psi = \Psi_1 + A\Psi_1$ einer klassischen Interpretation der Integralgleichung zugrunde liegt. Wir können also zusammenfassen: Die Iterationsmethode A liefert Lösungen, die innerhalb der betrachteten Näherungen mit den aus der Axiomatik folgenden Bedingungen verträglich sind. Komplexe Erweiterung (oder euklidische Rotation) ist erlaubt, doch ist das von Sawyer, Domokos u.a. verwendete Verfahren unberechtigt, die am Ursprung oder Lichtkegel singulären Lösungen auszuschneiden und die Integralgleichungen im klassischen Sinn zu interpretieren.

9) Das bei der Definition singulärer Funktionale in Kap. III verwendete Prinzip der analytischen Fortsetzung bzw. der "Res $\frac{A}{2}$ -Methode" erweist sich auch für nichtrelativistische Streugleichungen als vorteilhaft (Man hätte $V_R^{(\lambda)}$ statt durch (V.16) auch durch (V.28) definieren können). Fouriertransformation ist damit möglich und liefert die auf den Fall singulärer Potentiale verallgemeinerte Lippmann-Schwinger-Gleichung. Die Existenz einer solchen folgt ja bereits aus der Tatsache, daß die Lösung der Schrödingergleichung im Ortsraum auch für singuläre Poten-

tiale ohne weiteres fouriertransformierbar ist. Unsere Methode liefert im speziellen Fall der Potentiale

$$(VI.7) \quad \frac{1}{4\pi r^{2\lambda-1}} \quad 2\lambda - 1 = 2, 4, 6, \dots$$

die Resultate von Arbuzov und Filippov ((14)): eine durch analytische Fortsetzung im Drehimpuls ableitbare Impulsraumdifferentialgleichung, ist jedoch wesentlich allgemeiner, da sie für alle λ -Werte Gleichungen für die Partialamplituden ergibt, auch im Fall, wo analytische Fortsetzung im Drehimpuls nicht möglich ist und Arbuzovs und Filippovs Methode versagt.

1o) Als physikalisch wichtige Aspekte halten wir fest: Notwendige Bedingung, um nicht störungstheoretische Resultate für T-Produkte zu erhalten, ist die Existenz klassischer Lösungen der komplex erweiterten oder ins Euklidische rotierten Gleichungen. Diese Lösungen liefern nicht das Graphenschema zurück, das einen möglichen Ausgangspunkt für die Aufstellung der Gleichungen bildet und sind nicht durch Teilchenaustausch interpretierbar. Dem liegen folgende Umstände zugrunde:

- a) Definition der Minkowskiraum-Lösungen mittels euklidischer Konzepte zerstört den Propagatorcharakter der Lösungen (Verwendung eines elliptischen statt des hyperbolischen Differentialoperators $\square$, keine Fortpflanzung von Wellen im euklidischen Raum).
- b) Die Forderung der Existenz klassischer Lösungen entspricht einer Randbedingung im Sinn einer Quadratintegrabilität; diese würde sich aus einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Lösungen ergeben, die jedoch nicht durchführbar ist, da Zeit- und Ortskoordinaten ins Komplexe erweitert sind und keine unmittelbare physikalische Bedeutung haben.
- c) Komplexe Erweiterung oder euklidische Rotation projizieren aus dem Wechselwirkungskern V_F einen repulsiven oder attraktiven Teil heraus. (Die indefinite Form x^2 wird negativ bzw. positiv definit, wenn man in x^0 bzw. in $\vec{x}$ rotiert.)

Diese durch komplexe Erweiterung bzw. euklidische Rotation verursachten Modifikationen bedeuten starke Abweichungen von den üblichen Konzepten der gegenwärtigen Feldtheorie. Ihr Nutzen könnte nur durch entsprechende experimentelle Resultate eine Bestätigung finden.

AI. Notation und Formeln

Im wesentlichen verwenden wir die Bezeichnungsweise von Schwember((19)). Sei $\bar{\phi}(x)$ ein neutrales Bosonfeld, $\bar{\Psi}(x)$ ein Spinorfeld. ($x=(x^\mu)=(x^0, \vec{x})$). Dann sind die Zweipunktfunktionen (=Propagatoren) mit dem Argument $x-y$ definiert durch:

$$\begin{aligned}
 (AI.1) \quad \Delta_+^{\prime} &= \frac{i}{i} \langle 0 | \bar{\phi}(x) \bar{\phi}(y) | 0 \rangle, \\
 \Delta_-^{\prime} &= -\frac{i}{i} \langle 0 | \bar{\phi}(y) \bar{\phi}(x) | 0 \rangle, \\
 \Delta^{\prime} &= \frac{i}{i} \langle 0 | [\bar{\phi}(x), \bar{\phi}(y)] | 0 \rangle = \Delta_+^{\prime} + \Delta_-^{\prime}, \\
 \Delta_F^{\prime} &= i \langle 0 | T \bar{\phi}(x) \bar{\phi}(y) | 0 \rangle, \\
 \Delta_{\bar{F}}^{\prime} &= -i \langle 0 | \bar{T} \bar{\phi}(x) \bar{\phi}(y) | 0 \rangle = \Delta_F^{\prime} + \Delta_+^{\prime} - \Delta_-^{\prime}, \\
 \Delta_R^{\prime} &= i \langle 0 | \theta(x^0 - y^0) [\bar{\phi}(x), \bar{\phi}(y)] | 0 \rangle = \Delta_F^{\prime} - \Delta_-^{\prime} = \Delta_{\bar{F}}^{\prime} - \Delta_+^{\prime}, \\
 \Delta_A^{\prime} &= -i \langle 0 | \theta(y^0 - x^0) [\bar{\phi}(x), \bar{\phi}(y)] | 0 \rangle = \Delta_F^{\prime} + \Delta_+^{\prime} = \Delta_{\bar{F}}^{\prime} + \Delta_-^{\prime}, \\
 \Delta_P^{\prime} &= \frac{i}{2} \langle 0 | \varepsilon(x^0 - y^0) [\bar{\phi}(x), \bar{\phi}(y)] | 0 \rangle = \frac{1}{2} (\Delta_R^{\prime} + \Delta_A^{\prime}) = \frac{1}{2} (\Delta_F^{\prime} + \Delta_{\bar{F}}^{\prime}), \\
 S_+^{\prime} &= -\frac{i}{i} \langle 0 | \bar{\Psi}(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle, \\
 S_-^{\prime} &= -\frac{i}{i} \langle 0 | \bar{\Psi}(y) \bar{\Psi}(x) | 0 \rangle, \\
 S^{\prime} &= -\frac{i}{i} \langle 0 | [\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(y)]_+ | 0 \rangle = S_+^{\prime} + S_-^{\prime}, \\
 S_F^{\prime} &= -i \langle 0 | T \bar{\Psi}(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle, \\
 S_{\bar{F}}^{\prime} &= i \langle 0 | \bar{T} \bar{\Psi}(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle = S_F^{\prime} + S_+^{\prime} - S_-^{\prime}, \\
 S_R^{\prime} &= -i \langle 0 | \theta(x^0 - y^0) [\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(y)]_+ | 0 \rangle = S_F^{\prime} - S_-^{\prime} = S_{\bar{F}}^{\prime} - S_+^{\prime}, \\
 S_A^{\prime} &= i \langle 0 | \theta(y^0 - x^0) [\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(y)]_+ | 0 \rangle = S_F^{\prime} + S_+^{\prime} = S_{\bar{F}}^{\prime} + S_-^{\prime}, \\
 S_P^{\prime} &= -\frac{i}{2} \langle 0 | \varepsilon(x^0 - y^0) [\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(y)]_+ | 0 \rangle = \frac{1}{2} (S_R^{\prime} + S_A^{\prime}) = \frac{1}{2} (S_F^{\prime} + S_{\bar{F}}^{\prime}).
 \end{aligned}$$

T ist der Zeitordnungsoperator, $\bar{T}$ ordnet die Feldoperatoren in zeitlich entgegengesetzter Reihenfolge. Die Wightmanfunktionen $\Delta_{\pm}^{\prime}$, $S_{\pm}^{\prime}$ und ihre Linearkombinationen $\Delta^{\prime}$, $S^{\prime}$ bezeichnen wir auch als "homogene Funktionen" $\Delta_H^{\prime}$, $S_H^{\prime}$, die übrigen als "inhomogene Funktionen" $\Delta_I^{\prime}$, $S_I^{\prime}$. $\bar{\Psi}$ ist definiert durch

$$(AI.2) \quad \Psi^\dagger \gamma^0, \text{ d.h. } \bar{\Psi}_\alpha = \sum_\beta \Psi_\beta^\dagger \gamma_{\beta\alpha}^0,$$

wobei "+" hermitische Konjugation bedeutet. Für freie Felder

$$(AI.3) \quad \bar{\phi} = \bar{\phi}_{in}, \quad \bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{in},$$

die Teilchen der Masse m beschreiben, liefert (AI.1) die freien,

ungestrichenen Zweipunktfunktionen:

$$(AI.4) \quad \Delta_+(x, x') = \frac{1}{i} \langle 0 | \hat{\phi}_m(x) \hat{\phi}_m(-x') | 0 \rangle,$$

usw.

Δ_H, S_H genügen der homogenen Differentialgleichung

$$(AI.5) \quad (\square + \alpha^2) \Delta_H(x, x') = (i\partial - \alpha) S_H(x, x') = 0,$$

die inhomogenen Funktionen der Gleichung

$$(AI.6) \quad (\square + \alpha^2) \Delta_I(x, x') = (i\partial - \alpha) S_I(x, x') = \delta^4(x).$$

Sie lassen sich durch Besselfunktionen ausdrücken:

$$(AI.7) \quad \Delta_I(x, x') = \pm \frac{\alpha}{4i\pi^2} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{K_1(\alpha \sqrt{-(x \mp i\eta)^2})}{\sqrt{-(x \mp i\eta)^2}},$$

$$\Delta_F(x, x') = \pm \frac{i\alpha}{4\pi^2} \frac{K_0(\alpha \sqrt{-x'^2 \pm i0})}{\sqrt{-x'^2 \pm i0}},$$

$$S_{\dots}(x, x') = (-i\partial - \alpha) \Delta_{\dots}(x, x').$$

(Die Punkte stehen für einen der möglichen Indizes.)

Die γ -Matrizen sind definiert durch

$$(AI.8) \quad \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = g^{\mu\nu}$$

mit

$$(AI.9) \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}.$$

Die vierdimensionale Fouriertransformierte $\psi(x) = \mathcal{F}\varphi(p)$ einer Funktion $\varphi(p)$ ist erklärt durch

$$(AI.10) \quad \psi(x) = \mathcal{F}\varphi(p) = \int dp e^{ipx} \varphi(p),$$

die inverse Transformation durch

$$(AI.11) \quad \varphi(p) = \mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int dx e^{-ipx} \psi(x)$$

mit

$$(AI.12) \quad \begin{aligned} px &= g_{\mu\nu} x^\mu p^\nu = p^0 x^0 - \vec{p} \vec{x} \\ dp &= dp^0 d^3\vec{p} ; d^3\vec{p} = dp^1 dp^2 dp^3 \\ dx &= dx^0 d^3\vec{x} , d^3\vec{x} = dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

Die Parseval'sche Formel nimmt mit dieser Definition die einfache

che Form

$$(AI.13) \quad f(x) \langle \varphi(x) \rangle = f(x) \langle \mathcal{F} \varphi(p) \rangle = \mathcal{F} f(x) \langle \varphi(p) \rangle = f(p) \langle \varphi(p) \rangle$$

an, wobei $f(x)$ bzw.

$$(AI.14) \quad f(p) = \mathcal{F} f(x) \quad , \quad \text{symbolisch} \quad f(p) = \int dx e^{ipx} f(x)$$

Funktionale auf dem Raum der Testfunktionen $\varphi(x)$ bzw. ihrer inversen Fouriertransformierten $\varphi(p)$ sind. Die Fouriertransformierten der freien Propagatoren berechnen sich zu:

$$(AI.15) \quad \begin{aligned} \Delta_{\pm}(p, x^2) &= \mp 2\pi i \theta(\pm p^0) \delta(p^2 - x^2), \\ \Delta(p, x^2) &= -2\pi i \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - x^2), \\ \Delta_F(p, x^2) &= \frac{1}{x^2 - p^2 \mp i0}, \\ \Delta_R(p, x^2) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - (p \pm i\eta)^2}, \\ \Delta_D(p, x^2) &= \frac{1}{x^2 - p^2}, \\ S_{\dots}(p, x) &= (-\delta p - x) \Delta_{\dots}(p, x^2). \end{aligned}$$

Die dreidimensionale Fouriertransformation für die Testfunktionen $\varphi_s(\vec{x})$, $\varphi_s(\vec{p})$ ist definiert durch

$$(AI.16) \quad \varphi_s(\vec{x}) = \mathcal{F} \varphi_s(\vec{p}) = \int d^3\vec{p} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \varphi_s(\vec{p}),$$

ihre Inversion durch

$$(AI.17) \quad \varphi_s(\vec{p}) = \mathcal{F}^{-1} \varphi_s(\vec{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3\vec{x} e^{i\vec{p}\vec{x}} \varphi_s(\vec{x}),$$

die Parseval'sche Formel lautet:

$$(AI.18) \quad f_s(\vec{x}) \langle \varphi_s(\vec{x}) \rangle = f_s(\vec{x}) \langle \mathcal{F} \varphi_s(\vec{p}) \rangle = \mathcal{F} f_s(\vec{x}) \langle \varphi_s(\vec{p}) \rangle = f_s(\vec{p}) \langle \varphi_s(\vec{p}) \rangle.$$

Die Faltung

$$(AI.19) \quad f_1(x) * f_2(x), \quad \text{symbolisch} \quad \int dy f_1(x-y) f_2(y)$$

zweier Funktionale ist erklärt durch die Relation

$$(AI.20) \quad \{f_1(x) * f_2(x)\} \langle \varphi(x+y) \rangle = f_1(x) \cdot f_2(y) \langle \varphi(x+y) \rangle.$$

Wir benützen die übliche Tensorsymbolik: Über gleiche Indizes, die in einem Produkt einmal hoch-, einmal tiefgestellt vorkommen - und nur über solche -, wird summiert. Bei inneren Produkten von Vektoren können die Indizes weggelassen werden; also:

$$(AI.21) \quad \gamma \partial = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$x^2 = x x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - \vec{x}^2.$$

Weiter ist

$$(AI.22) \quad \square = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \Delta,$$

$$(AI.23) \quad \Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}.$$

Folgende Funktionen werden verwendet: die Sprungfunktionen

$$(AI.24) \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$(AI.25) \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

die Kugel- bzw. Besselfunktionen P_ℓ bzw. Y_ℓ , die Besselfunktionen I_ν , K_ν mit imaginärem Argument, die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ und die logarithmische Ableitung der Fakultät

$$(AI.26) \quad \psi(x) = \frac{d}{dx} \log(x-1)!$$

Die in Kap. IV und Anhang V verwendeten Spinoren $u_{\pm}^s(\vec{p})$ sind wie in ((19)) definiert: Es ist

$$(AI.27) \quad (\gamma_p \mp m) u_{\pm}^s(\vec{p}) = 0,$$

$$\bar{u}_{\pm}^s(\vec{p}) (\gamma_p \mp m) = 0$$

mit

$$(AI.28) \quad p^0 = E(\vec{p}) = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

s ist der Helizitätsindex.

AIII. Lorentzinvariante Distributionen

1. Definitionen

Die im folgenden definierten Distributionen sind erklärt auf dem Raum $\mathcal{L}$ der ganzen analytischen Funktionen $\varphi(x)$, ihre Fouriertransformierten auf dem Raum $\mathcal{D}$ aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\psi(p)$ mit kompaktem Träger. Wir führen in Anlehnung an (AI.1) folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
 \text{(AIII.1)} \quad D_{\pm}(x) &= \pm \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{(x \mp i\eta)^2} \right)^{\lambda} = \pm |x|^{\lambda-2} \exp \left\{ \mp i \lambda \pi \theta(x) \right\}, \\
 D_{\kappa}(x) &= \frac{-i \pi \varepsilon(x) \delta^{(\lambda-1)}(x)}{(\lambda-1)!} = -i \varepsilon(x) |x|^{\lambda-2} \sin \left\{ \lambda \pi \theta(x) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ D_{+}(x) - D_{-}(x) \right\}, \\
 D_{\eta}(x) &= \left(\frac{-1}{x^2} \right)^{\lambda} = |x|^{\lambda-2} \cos \left\{ \lambda \pi \theta(x) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ D_{+}(x) + D_{-}(x) \right\}, \\
 D_F(x) &= \pm \left(\frac{-1}{x^2 \mp i0} \right)^{\lambda} = \pm |x|^{\lambda-2} \exp \left\{ i \lambda \pi \theta(x) \right\}, \\
 D_P(x) &= \frac{-i \pi \delta^{(\lambda-1)}(x)}{(\lambda-1)!} = -i |x|^{\lambda-2} \sin \left\{ \lambda \pi \theta(x) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ D_F(x) + D_{\bar{F}}(x) \right\}, \\
 D_R(x) &= \frac{-2i \pi \theta(\pm x) \delta^{(\lambda-1)}(x)}{(\lambda-1)!} = -2i \theta(\pm x) |x|^{\lambda-2} \sin \left\{ \lambda \pi \theta(x) \right\} = \\
 &= D_P(x) \pm D_{\kappa}(x), \\
 S_{\dots}(x) &= -i \gamma D_{\dots}(x).
 \end{aligned}$$

$D_{\pm}^{(\lambda)}$, $D_{\kappa}^{(\lambda)}$, $D_{(\lambda)}$, $S_{\pm}^{(\lambda)}$, $S_{\kappa}^{(\lambda)}$, $S_{(\lambda)}$ bezeichnen wir als "homogene", die übrigen Funktionale als "inhomogene Funktionen". Diese Funktionale sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
 \text{(AIII.2)} \quad D_{\pm}^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle &= \pm \lim_{\eta \rightarrow 0} \int dx \left(\frac{-1}{(x \mp i\eta)^2} \right)^{\lambda} \varphi(x \mp i\eta) = \\
 &= \int_{\pm} dx \left(\frac{-1}{x^2} \right)^{\lambda} \varphi(x).
 \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen der Analytizitätseigenschaften des Integranden und seines raschen Abfallens im Unendlichen (vgl. Fig. 12). Somit ist (Fig. 13, 14):

$$\begin{aligned}
 (\text{AII.3}) \quad \mathcal{D}_K^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{C_+ + C_-} dx \left(\frac{-1}{x^2} \right)^\lambda \varphi(x) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{C_K} dx \left(\frac{-1}{x^2} \right)^\lambda \varphi(x).
 \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt nach dem Satz von Cauchy, da $\left(\frac{-1}{x^2}\right)^\lambda$ für $|x^0| < |\vec{x}|$ analytisch ist.

$$(\text{AII.4}) \quad \mathcal{D}_{(A)}^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \frac{1}{2} \int_{C_{(A)}} dx \left(\frac{-1}{x^2} \right)^\lambda \varphi(x)$$

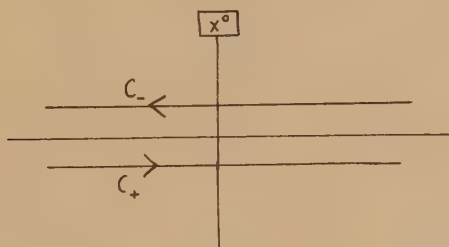


Fig. 12

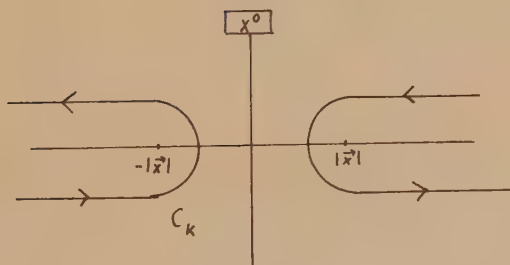


Fig. 13

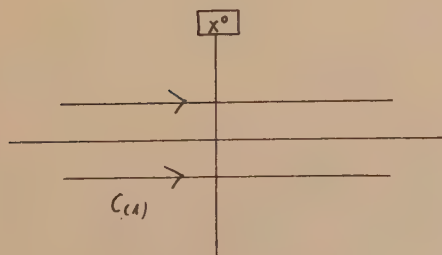


Fig. 14

Die homogenen Funktionen existieren für $\text{Re } \lambda > 1$ und stellen in λ analytische Funktionale dar, da man unter dem Integralzeichen nach λ differenzieren darf.

Für $1 < \text{Re } \lambda < 2$ ist nach Definition

$$(AII.5) \quad \mathcal{D}_F^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \lim_{\eta_{\mu\nu} \rightarrow 0} \int dx \left(\frac{-1}{x^2 - i \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu} \right)^\lambda \varphi(x),$$

wobei $\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ eine positiv definite quadratische Form darstellt.

(AII.5) existiert und kann in der Form

$$(AII.6) \quad \mathcal{D}_F^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int_{C_F} dx \left(\frac{-1}{x^2} \right)^\lambda \varphi(x)$$

(vgl. Fig. 15) geschrieben werden. Für die übrigen λ -Werte, ausgenommen die ganzzahligen

$$(AII.7) \quad \lambda = n, \quad n = 2, 3, \dots$$

ist $\mathcal{D}_F^{(\lambda)}$ definiert durch analytische Fortsetzung in λ :

$$(AII.8) \quad \mathcal{D}_F^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = A F \mathcal{D}_F^{(\lambda+2)}(x) \alpha \langle \varphi(x) \rangle = A F \mathcal{D}_F^{(\lambda)}(x) \left(\frac{-1}{x^2 - i0} \right)^2 \langle \varphi(x) \rangle.$$

(Zur Erläuterung dieser Definition vgl. (III.13), (III.14).)

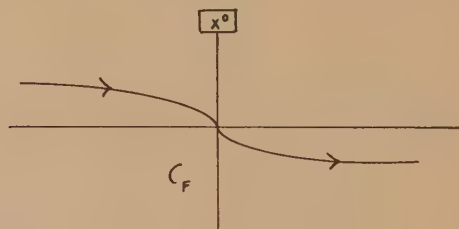


Fig. 15

Bei den ausgenommenen Werten (AII.7) hat $\mathcal{D}_F^{(\lambda)}$ einfache Pole:

$$(AII.9) \quad \begin{aligned} \text{Res}_{\lambda=n} \mathcal{D}_F^{(\lambda)}(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow n} (\lambda - n) \mathcal{D}_F^{(\lambda)}(x) = \\ &= \frac{i\pi^2}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (-\square)^{n-2} \int \varphi(x) \end{aligned}$$

In diesem Fall definieren wir $\mathcal{D}_F^{(n)}$ als den für $\lambda \rightarrow n$ regulären Anteil des Funktionals $\mathcal{D}_F^{(\lambda)}$:

$$(AII.10) \quad \mathcal{D}_F^{(n)}(x) = \left\{ \mathcal{D}_F^{(\lambda)}(x) - \frac{\text{Res}_{\lambda=n} \mathcal{D}_F^{(\lambda)}(x)}{\lambda - n} \right\}_{\lambda \rightarrow n}$$

so daß also für alle λ -Werte ($\text{Re} \lambda > 1$) gilt:

$$(AII.11) \quad \begin{aligned} \overline{D}_F^{(\lambda)}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} \overline{D}_F^{(\lambda+2)}(x) a^{2z} \\ &= \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \overline{D}_F^{(\lambda+2)}(x) a^{2z} \\ &= \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \overline{D}_F^{(\lambda)}(x) \left(\frac{-a^2}{x^2 - i0} \right)^2 \end{aligned}$$

Für manche Zwecke ist folgende Definition günstiger:

$$(AII.12) \quad \begin{aligned} \overline{D}_F^{(\lambda)}(x) &= \overline{D}_F^{(\lambda)}(x), \quad \lambda = 2, 3, \dots \\ (n-2)! (n-1)! \overline{D}_F^{(n)}(x) &= \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} (n+2-2)! (n+2-1)! \overline{D}_F^{(n+2)}(x) (4a^2)^z = \\ &= (n-2)! (n-1)! \overline{D}_F^{(n)}(x) + \frac{i\pi^2}{4^{n-2}} [\log 4 + 4(n) + 4(n-1)] (-\square)^{n-2} \delta^4(x), \quad n = 2, 3, \dots \\ \overline{S}_F^{(\lambda)}(x) &= -i\gamma_5 \overline{D}_F^{(\lambda)}(x). \end{aligned}$$

Entsprechende Überlegungen und Definitionen gelten für die übrigen inhomogenen Funktionen: Für $1 < \text{Re} \lambda < 2$ ist (Fig. 16, 17, 18, 19)

$$(AII.13) \quad \overline{D}_F^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = - \lim_{q_{\mu\nu} \rightarrow 0} \int dx \left(\frac{-1}{x^2 + i\epsilon q_{\mu\nu} x^\mu x^\nu} \right)^\lambda \varphi(x) =$$

$$(AII.14) \quad \overline{D}_P^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int_{C_P} dx \left(\frac{-1}{x^2} \right)^\lambda \varphi(x),$$

$$(AII.15) \quad \overline{D}_R^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int_{C_R} dx \left(\frac{-1}{x^2} \right)^\lambda \varphi(x),$$

$$(AII.16) \quad \overline{D}_A^{(\lambda)}(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int_{C_A} dx \left(\frac{-1}{x^2} \right)^\lambda \varphi(x).$$

Analog zu (AII.11) ist für die übrigen λ -Werte ($I=F, \overline{F}, P, R, A$)

$$(AII.17) \quad \overline{D}_I^{(\lambda)}(x) = \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \overline{D}_I^{(\lambda+2)}(x) a^{2z}$$

bzw.

$$(AII.18) \quad \overline{D}_I^{(\lambda)}(x) = \overline{D}_I^{(\lambda)}(x), \quad \lambda \neq 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \overline{D}_I^{(n)}(x) &= \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \frac{(n+2-2)! (n+2-1)!}{(n-2)! (n-1)!} \overline{D}_I^{(n+2)}(x) (4a^2)^z = \\ &= \overline{D}_I^{(n)}(x) + \frac{i\pi^2 [\log 4 + 4(n) + 4(n-1)]}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (-\square)^{n-2} \delta^4(x), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\overline{S}_I^{(\lambda)}(x) = -i\gamma_5 \overline{D}_I^{(\lambda)}(x),$$

$$(AII.19) \quad \text{Res}_{\lambda=n} \overline{D}_I^{(\lambda)}(x) = \text{Res}_{\lambda=n} \overline{D}_I^{(\lambda)}(x) = \frac{i\pi^2}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (-\square)^{n-2} \delta^4(x).$$

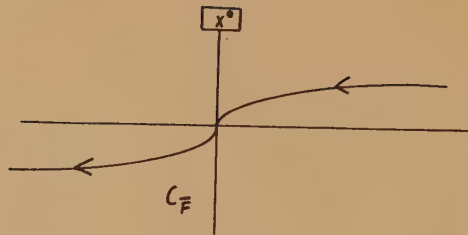


Fig. 16

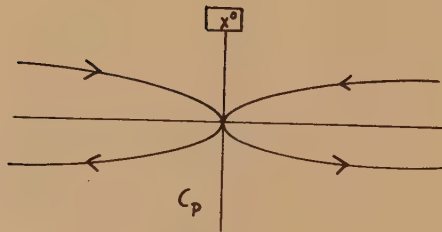


Fig. 17

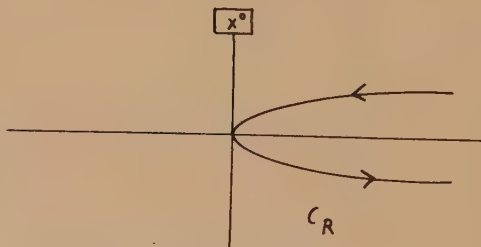


Fig. 18

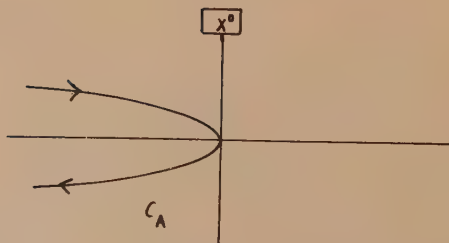


Fig. 19

Für $1 < \text{Re } \lambda < 2$ gilt

$$\begin{aligned}
 (\text{AII.20}) \quad \mathcal{D}_F^{(\lambda)}(x) &= \Theta(x^0) \mathcal{D}_+^{(\lambda)}(x) - \Theta(-x^0) \mathcal{D}_-^{(\lambda)}(x) - \mathcal{E}(x^0) \mathcal{D}_K^{(\lambda)}(x) + \mathcal{D}_{(t)}^{(\lambda)}(x), \\
 \mathcal{D}_F^{(\lambda)}(x) &= \Theta(x^0) \mathcal{D}_-^{(\lambda)}(x) - \Theta(-x^0) \mathcal{D}_+^{(\lambda)}(x) - \mathcal{E}(x^0) \mathcal{D}_K^{(\lambda)}(x) - \mathcal{D}_{(t)}^{(\lambda)}(x), \\
 \mathcal{D}_R^{(\lambda)}(x) &= 2 \Theta(x^0) \mathcal{D}_K^{(\lambda)}(x), \\
 \mathcal{D}_A^{(\lambda)}(x) &= 2 \Theta(-x^0) \mathcal{D}_K^{(\lambda)}(x), \\
 \mathcal{D}_p^{(\lambda)}(x) &= \mathcal{E}(x^0) \mathcal{D}_K^{(\lambda)}(x),
 \end{aligned}$$

wobei die auftretenden Produkte $\Theta(x^0) \mathcal{D}_\pm^{(\lambda)}(x)$ usw. existieren. Da sämtliche in (AII.20) vorkommenden inhomogenen Funktionen für die übrigen λ -Werte in gleicher Weise, nämlich durch (AII.17) bzw. (AII.18) definiert sind, sind damit in natürlicher Weise auch die obigen Produkte erklärt, so daß (AII.20) für alle λ gilt. Analoge Überlegungen lassen sich für die Spinorfunktionen $\mathcal{S}_\dots^{(\lambda)}$ durchführen. Man erhält die gleichen Relationen wie bei (AII.20), wobei $\mathcal{D}_\dots^{(\lambda)}$ durch $\mathcal{S}_\dots^{(\lambda)}$ ersetzt ist. Weiter gilt

$$(\text{AII.21}) \quad \text{Res}_{\lambda=n} \mathcal{S}_I^{(\lambda)}(x) = \text{Res}_{\lambda=n} \bar{\mathcal{S}}_I^{(\lambda)}(x) = \frac{i \pi^2}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (-i \gamma_0) (-\square)^{n-2} \mathcal{S}^4(x).$$

Diese Resultate sind in Einklang mit der ursprünglichen Definition

$$(\text{AII.22}) \quad \mathcal{S}_\dots^{(\lambda)}(x) = -i \gamma_0 \mathcal{D}_\dots^{(\lambda)}(x) \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathcal{S}}_\dots^{(\lambda)}(x) = -i \gamma_0 \bar{\mathcal{D}}_\dots^{(\lambda)}(x),$$

wenn man die Produkte $\Theta(x^0) \mathcal{D}_\pm^{(\lambda)}(x)$ usw. nach der üblichen Produktregel differenziert und beachtet, daß man aus Symmetriegründen

$$(\text{AII.23}) \quad \mathcal{S}(x^0) \mathcal{D}_K^{(\lambda)}(x) = 0$$

zu setzen hat ($\mathcal{D}_K^{(\lambda)}$ ist ungerade in x).

Die allgemeinste mögliche Definition der inhomogenen Funktionen unterscheidet sich (vgl. Kap. III) von der hier gegebenen für die Distributionen $\mathcal{D}_I^{(\lambda)}$ um

$$(\text{AII.24}) \quad - \sum_0^{[\lambda]-2} d_i \square^i \mathcal{S}^4(x),$$

für die Funktionale $\mathcal{S}_I^{(\lambda)}$ um

$$(\text{AII.25}) \quad -i \gamma_0 \sum_0^{[\lambda]-2} d_i \square^i \mathcal{S}^4(x)$$

mit beliebigen endlichen Koeffizienten d_i . Die hier gegebene Definition der inhomogenen Funktionen $D_i^{(\lambda)}$, $S_i^{(\lambda)}$ für nichtganze λ durch analytische Fortsetzung stellt die in Kap. III erwähnte kanonische Regularisierung dar.

Der Vollständigkeit halber geben wir den Zusammenhang der in (AII.1) eingeführten Funktionale mit den freien Zweiteilchenpropagatoren an:

$$\begin{aligned}
 \text{(AII.26)} \quad D_I^{(\lambda)}(x) &= 4i\overline{\Pi}^I \Delta_I(x, 0), \\
 D_K^{(\lambda)}(x) &= 2i\overline{\Pi}^I \Delta(x, 0), \\
 D_I^{(\lambda)}(x) &= -4i\overline{\Pi}^I \Delta_I(x, 0), \quad I=F, \overline{F}, P, R, A, \\
 S_I^{(\lambda)}(x) &= 4i\overline{\Pi}^I S_I(x, 0), \\
 S_K^{(\lambda)}(x) &= 2i\overline{\Pi}^I S(x, 0), \\
 S_I^{(\lambda)}(x) &= -4i\overline{\Pi}^I S_I(x, 0), \quad I=F, \overline{F}, P, R, A.
 \end{aligned}$$

Zu (AII.3) und (AII.17) bzw. (AII.18) für $I=P$, d.h. zur Definition von $D_K^{(\lambda)}(x)$ und $D_P^{(\lambda)}(x)$ bzw. $\overline{D}_P^{(\lambda)}(x)$ ist Folgendes zu bemerken: Für $\lambda=m$, $m=1, 2, 3, \dots$ sind $f(x^0) \delta^{(m-1)}(x^1)$ und $\delta^{(\lambda-1)}(x^1)$ nach der Theorie der auf glatten Flächen konzentrierten Distributionen zunächst auf andere Weise definiert, nämlich durch

$$\text{(AII.27)} \quad f(x^0) \delta^{(m-1)}(x^1) \langle \varphi(x) \rangle = \int dr \tau^2 \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial(x^0)^2} \right)^{m-1} \int_{\vec{x}=\vec{r}} d\Omega_{\vec{x}} \frac{\varphi(x^0, \vec{x}) - \varphi(-x^0, \vec{x})}{2x^0} \right\}_{x^0=r}$$

und

$$\text{(AII.28)} \quad \delta^{(m-1)}(x^1) \langle \varphi(x) \rangle = \int dr \tau^2 \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial(x^0)^2} \right)^{m-1} \int_{\vec{x}=\vec{r}} d\Omega_{\vec{x}} \frac{\varphi(x^0, \vec{x}) + \varphi(-x^0, \vec{x})}{2x^0} \right\}_{x^0=r}$$

wobei für $m>1$ die linke Seite von (AII.28) als regularisierter Wert des Integrals auf der rechten Seite aufzufassen ist. Beachtet man aber, daß nach (AII.3) gilt

$$\begin{aligned}
 \text{(AII.29)} \quad f(x^0) \delta^{(m-1)}(x^1) \langle \varphi(x) \rangle &= \\
 &= -\frac{(m-1)!}{2\overline{\Pi}^I} \int d^3\vec{x} \int_{C_K} dx^0 \left(\frac{-1}{x^2} \right)^m \varphi(x) = \\
 &= \frac{1}{2\overline{\Pi}^I} \int dr \tau^2 \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial y^2} \right)^{m-1} \int_{C_K} dx^0 \int_{\vec{x}=\vec{r}} d\Omega_{\vec{x}} \frac{\varphi(x^0, \vec{x})}{(x^0)^2 - y^2} \right\}_{y=r}.
 \end{aligned}$$

was nach Cauchy gleich

$$(AII.30) \quad \int_0^{\infty} dr r^2 \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^{m-1} \int_{\vec{r}'=\vec{r}} d\Omega_{\vec{r}'} \frac{y(y, \vec{r}) - y(-y, \vec{r})}{2y} \right\}_{y=r}$$

ist, so sieht man daß (AII.3) mit (AII.27) übereinstimmt. Entsprechend zeigt man, daß die Definitionen (AII.28) und (AII.17) bzw. (AII.18) für $I=P$ identisch sind, wenn man die Regularisierungsvorschrift in (AII.28) geeignet wählt.

2. Impulsraumdarstellung, Skalenparameterabhängigkeit

Berücksichtigt man, daß sich die Fouriertransformation der $D^{(\lambda)}$ auf Bessel- und Hankeltransformationen zurückführen läßt, so findet man

$$(AII.31) \quad \begin{aligned} D_{\pm}^{(\lambda)}(p) &= \pm \frac{(2\pi)^3}{4^{\lambda-1}(\lambda-2)!(\lambda-1)!} (p^2)^{\lambda-2} \Theta(\pm p^0) \Theta(p^2), \\ D_k^{(\lambda)}(p) &= \frac{(2\pi)^3}{2 \cdot 4^{\lambda-1}(\lambda-2)!(\lambda-1)!} (p^2)^{\lambda-2} \xi(p^0) \Theta(p^2), \\ D_{(1)}^{(\lambda)}(p) &= \frac{(2\pi)^3}{2 \cdot 4^{\lambda-1}(\lambda-2)!(\lambda-1)!} (p^2)^{\lambda-2} \Theta(p^2) \end{aligned}$$

und weiter

$$(AII.32) \quad \begin{aligned} D_F^{(\lambda)}(p) &= \frac{-i\pi^2(-\lambda+1)!}{4^{\lambda-2}(\lambda-1)!} (-p^2 \mp i0)^{\lambda-2} = \\ &= \frac{i(2\pi)^3}{2 \cdot 4^{\lambda-1}(\lambda-2)!(\lambda-1)! \sin \lambda\pi} (-p^2 \mp i0)^{\lambda-2}, \\ D_R^{(\lambda)}(p) &= \frac{-i\pi^2(-\lambda+1)!}{4^{\lambda-2}(\lambda-1)!} \lim_{\eta \rightarrow 0} (- (p \mp i\eta)^2)^{\lambda-2} = \\ &= \frac{i(2\pi)^3}{2 \cdot 4^{\lambda-1}(\lambda-2)!(\lambda-1)! \sin \lambda\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} (- (p \mp i\eta)^2)^{\lambda-2}, \\ D_p^{(\lambda)}(p) &= \frac{-i\pi^2(-\lambda+1)!}{4^{\lambda-2}(\lambda-1)!} (-p^2)^{\lambda-2} \\ &= \frac{i(2\pi)^3}{2 \cdot 4^{\lambda-1}(\lambda-2)!(\lambda-1)! \sin \lambda\pi} (-p^2)^{\lambda-2}, \end{aligned}$$

wobei $(-p^2)^{\lambda-2}$ analog zu (AII.1) definiert ist durch

$$(AII.33) \quad \frac{1}{2} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ (- (p - i\eta)^2)^{\lambda-2} + (- (p + i\eta)^2)^{\lambda-2} \right\} = |p^2|^{\lambda-2} \cos \left\{ \lambda\pi \Theta(p^2) \right\}.$$

Die Impulsraumdarstellung der inhomogenen Funktionen gilt zunächst nur für $1 < \text{Re} \lambda < 2$, nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung somit für alle $\lambda \neq 2, 3, \dots$. Das in (AII.19) behauptete Polverhalten der $\mathcal{D}_I^{(\lambda)}$ läßt sich aus (AII.32) leicht entnehmen. Für die ganzen λ -Werte (AII.7) ist nach (AII.17)

$$\begin{aligned}
 \text{(AII.34)} \quad \mathcal{D}_F^{(n)}(p) &= \frac{i \pi^{\frac{1}{2}}}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (p^2)^{n-2} \left[\log \left(-\frac{a^2}{4} (p^2 + i0) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 4(n) - 4(n-1) \right], \\
 \mathcal{D}_R^{(n)}(p) &= \frac{i \pi^{\frac{1}{2}}}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (p^2)^{n-2} \left[\lim_{\eta \rightarrow 0} \log \left(-\frac{a^2}{4} (p^2 + i\eta) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 4(n) - 4(n-1) \right], \\
 \mathcal{D}_p^{(n)}(p) &= \frac{i \pi^{\frac{1}{2}}}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (p^2)^{n-2} \left[\log \left(-\frac{a^2}{4} p^2 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 4(n) - 4(n-1) \right].
 \end{aligned}$$

Für $S_{\dots}^{(\lambda)}$ erhält man

$$\text{(AII.35)} \quad S_{\dots}^{(\lambda)}(p) = -\delta_p \mathcal{D}_{\dots}^{(\lambda)}(p).$$

Für die in (AII.18) definierten Größen ergibt sich

$$\text{(AII.36)} \quad \overline{\mathcal{D}}_I^{(\lambda)}(p) = \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(p), \quad \lambda = 2, 3, \dots$$

und für $\lambda = n$, $n = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
 \text{(AII.37)} \quad \overline{\mathcal{D}}_F^{(n)}(p) &= \frac{i \pi^{\frac{1}{2}}}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (p^2)^{n-2} \log \left(-\frac{a^2}{4} (p^2 + i0) \right), \\
 \overline{\mathcal{D}}_R^{(n)}(p) &= \frac{i \pi^{\frac{1}{2}}}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (p^2)^{n-2} \lim_{\eta \rightarrow 0} \log \left(-\frac{a^2}{4} (p^2 + i\eta) \right), \\
 \overline{\mathcal{D}}_p^{(n)}(p) &= \frac{i \pi^{\frac{1}{2}}}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (p^2)^{n-2} \log \left(-\frac{a^2}{4} p^2 \right),
 \end{aligned}$$

$$\text{(AII.38)} \quad \overline{S}_{\dots}^{(\lambda)}(p) = -\delta_p \overline{\mathcal{D}}_{\dots}^{(\lambda)}(p).$$

Aus den Formeln für die Fouriertransformierten folgt unmittelbar, daß nur für die ganzen λ -Werte (AII.7) die Distributionen $\mathcal{D}_I^{(\lambda)}$, $S_I^{(\lambda)}$ explizit vom Skalenparameter a abhängen:

$$(AII.39) \quad \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) \big|_a - \overline{\mathcal{D}}_I^{(\lambda)}(x) \big|_{\bar{a}} = \overline{\mathcal{D}}_I^{(\lambda)}(x) \big|_a - \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) \big|_{\bar{a}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{i \pi^l \log a^2 / \bar{a}^2}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} (-\square)^{n-2} \mathcal{J}^4(x), & \lambda = n, n = 2, 3, \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da der Skalenparameter a willkürlich ist, sind also die Funktionale $\mathcal{D}_I^{(\lambda)}$, $\overline{\mathcal{D}}_I^{(\lambda)}$ nur bis auf einen Term proportional zu $\square^{n-2} \mathcal{J}^4(x)$ bestimmt.

3. Differentialoperatoren, Berechnung der Renormierungsgrößen $Z_{2,3}^{-1}$

Für die inhomogenen Funktionen $\mathcal{D}_I^{(\lambda)}$ ist für $\lambda \neq 2, 3, \dots$

$$(AII.40) \quad \square \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) = -4 \lambda (\lambda - 1) \mathcal{D}_I^{(\lambda+1)}(x)$$

und deshalb

$$(AII.41) \quad \square^m \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) = (-4)^m \frac{(\lambda - m - 2)! (\lambda + m - 1)!}{(\lambda - 2)! (\lambda - 1)!} \mathcal{D}_I^{(\lambda+m)}(x)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Dies gilt auch für $\lambda = 1$, wenn man beachtet, daß die rechte Seite für $\lambda = 1$ sich zu

$$(AII.42) \quad \square^m \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) = m! 4^m \frac{\mathcal{D}_I^{(\lambda+m)}(x)}{(-\lambda - m + 1)!} \bigg|_{\lambda=1} = -4i \pi^l \square^{m-1} \mathcal{J}^4(x)$$

ergibt. Für $\lambda = m = 1$ hat man insbesondere:

$$(AII.43) \quad \square \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) = i \mathcal{J}^0 \mathcal{S}_I^{(\lambda)}(x) = -4i \pi^l \mathcal{J}^4(x).$$

Für die homogenen Funktionen gelten die (AII.40), (AII.41) entsprechenden Formeln stets, d.h. für alle λ :

$$(AII.44) \quad \square \mathcal{D}_H^{(\lambda)}(x) = -4 \lambda (\lambda - 1) \mathcal{D}_H^{(\lambda+1)}(x),$$

$$(AII.45) \quad \square^m \mathcal{D}_H^{(\lambda)}(x) = (-4)^m \frac{(\lambda+m-2)! (\lambda+m-1)!}{(\lambda-2)! (\lambda-1)!} \mathcal{D}_H^{(\lambda+m)}(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Aus (AII.40) und (AII.44) erhält man durch Differenzieren nach λ an der Stelle $\lambda=0$:

$$(AII.46) \quad \square \lim_{\eta \rightarrow 0} \log \left(\frac{-a^2}{(x \mp i\eta)^2} \right) = \square \log (\pm a^2 \mathcal{D}_{\pm}^{(1)}(x)) = \\ = \pm 4 \mathcal{D}_2^{(1)}(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{-4}{(x \mp i\eta)^2},$$

$$(AII.47) \quad \square \log \left(\frac{-a^2}{x^2 - i0} \right) = \square \log (\pm a^2 \mathcal{D}_{\mp}^{(1)}(x)) = \\ = \pm 4 \mathcal{D}_{\mp}^{(1)}(x) = \frac{-4}{x^2 \mp i0}$$

Wegen (AII.41) können für die nichtganzen λ mit $\text{Re} \lambda > 2$ die inhomogenen Funktionen $\mathcal{D}_I^{(\lambda)}$ auch als Ableitung der Funktionale $\mathcal{D}_I^{(\lambda)}$ mit $1 < \text{Re} \lambda < 2$ definiert werden. Diese Definition ist gleichwertig mit analytischer Fortsetzung in λ . Im Impulsraum lautet (AII.41):

$$(AII.48) \quad (-p^2)^m \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(p) = (-4)^m \frac{(\lambda+m-2)! (\lambda+m-1)!}{(\lambda-2)! (\lambda-1)!} \mathcal{D}_I^{(\lambda+m)}(p)$$

was offensichtlich erfüllt ist, wenn man beachtet, daß

$$(AII.49) \quad -(p^2 \pm i0)^m = \lim_{\eta \rightarrow 0} ((p \mp i\eta)^2)^m = (p^2)^m$$

gilt.

Unter Benutzung der Fouriertransformation findet man für die ganzen λ -Werte (AII.7)

$$(AII.50) \quad \square \mathcal{D}_I^{(n)}(x) = -4n(n-1) \mathcal{D}_I^{(n+1)}(x) - \frac{i\pi^2 (2n-1)!}{4^{n-1} (n-1)! n!} (-\square)^{n-1} \mathcal{S}^4(x)$$

und entsprechend

$$(AII.51) \quad \square^m \mathcal{D}_I^{(n)}(x) = (-4)^m \frac{(n+m-2)! (n+m-1)!}{(n-2)! (n-1)!} \mathcal{D}_I^{(n+m)}(x) + \\ + \frac{i\pi^2 (-1)^m}{4^{n-2} (n-2)! (n-1)!} [4(n+m) + 4(n+m-1) - 4(n) - 4(n-1)] (-\square)^{n+m-2} \mathcal{S}^4(x).$$

(AII.50) und (AII.51) gelten wegen $\frac{-4(n-1)}{(n-2)!} \Big|_{n=1} = 1$ auch für $n=1$, wie der Vergleich mit (AII.42) lehrt. Bei Verwendung der Definitionen (AII.18) ergibt sich jedoch für alle $\lambda \neq 1$:

$$(AII.52) \quad \square \bar{D}_I^{(\lambda)}(x) = -4 \lambda (\lambda-1) \bar{D}_I^{(\lambda+1)}(x),$$

$$(AII.53) \quad \square^m \bar{D}_I^{(\lambda)}(x) = (-4)^m \frac{(\lambda+m-2)! (\lambda+m-1)!}{(\lambda-2)! (\lambda-1)!} \bar{D}_I^{(\lambda+m)}(x);$$

für $\lambda=1$ natürlich wieder

$$(AII.54) \quad \square^m \bar{D}_I^{(1)}(x) = -4i \pi^2 \square^{m-1} \delta^4(x).$$

(AII.40) und (AII.50) sind die Analoga zu den Formeln

$$(AII.55) \quad \frac{d}{dx} x_+^{-\lambda} = -\lambda x_+^{-\lambda-1}, \quad \lambda \neq 0, 1, 2, \dots$$

$$(AII.56) \quad \frac{d}{dx} x_+^{-m} = -m x_+^{-m-1} + \frac{(-1)^m}{m!} \delta^{(m)}(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

für die im Eindimensionalen definierten Distributionen $x_+^{-\lambda}$.

Mit (AII.40) und (AII.50) läßt sich der "gleichzeitige Antikommutator"

$$(AII.57) \quad -\frac{1}{2\pi} \delta^0(x^0) S_K^{(\lambda)}(x) = -\frac{1}{4\pi} [\delta \widetilde{\delta}(x^0)] S_K^{(\lambda)}(x)$$

berechnen: Es ist

$$(AII.58) \quad -\frac{1}{4\pi} [\delta \widetilde{\delta}(x^0)] S_K^{(\lambda)}(x) = -\frac{1}{4\pi} \delta \widetilde{\delta} S_P^{(\lambda)}(x) + \frac{1}{4\pi} \widetilde{\delta}(x^0) \delta \widetilde{S}_K^{(\lambda)}(x) =$$

$$= \frac{i}{4\pi} \square \bar{D}_P^{(\lambda)}(x) - \frac{i}{4\pi} \widetilde{\delta}(x^0) \square \bar{D}_K^{(\lambda)}(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{(2m-1)}{4^{m-1}(m-1)! m!} (-\square)^{m-1} \delta^4(x), & \lambda=m, m=1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiert man also Z_2^{-1} durch

$$(AII.59) \quad -\frac{1}{2\pi} \delta^0(x^0) S_K^{(\lambda)}(x) = Z_2^{-1} \delta^4(x)$$

so ergibt sich ein Differentialoperator der Form:

$$(AII.60) \quad Z_2^{-1} = \begin{cases} \frac{(2m-1)}{4^{m-1}(m-1)! m!} (-\square)^{m-1}, & \lambda=m, m=1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechendes läßt sich für den "Bosonpropagator" $\bar{D}_K^{(\lambda)}$ durchführen: Definiert man Z_3^{-1} durch

$$(AII.61) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int d(x^0) \mathcal{D}_K^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{4\pi^2} [\mathcal{E}(x^0)] I \mathcal{E} \mathcal{D}_K^{(\lambda)}(x)] = \mathcal{Z}_3^{-1} \mathcal{J}^4(x),$$

so erhält man auf gleiche Weise

$$(AII.62) \quad \mathcal{Z}_3^{-1} = \begin{cases} \frac{(2n-1)}{4^{n-1}(n-1)!n!} (-\square)^{n-1}, & \lambda=n, n=1,2,3,\dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bei Verwendung der Definition (AII.18) findet man jedoch

$$(AII.63) \quad \bar{\mathcal{Z}}_2^{-1} - \bar{\mathcal{Z}}_3^{-1} = \begin{cases} 1, & \lambda=1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wenn man die den Funktionalen $\bar{\mathcal{S}}^{(\lambda)}$, $\bar{\mathcal{D}}^{(\lambda)}$ zugeordneten Renormierungsfaktoren mit $\bar{\mathcal{Z}}_{2,3}^{-1}$ bezeichnet, da dann

$$(AII.64) \quad \bar{\mathcal{Z}}_2^{-1} \mathcal{J}^4(x) = \bar{\mathcal{Z}}_3^{-1} \mathcal{J}^4(x) = \frac{1}{4\pi^2} \bar{\mathcal{D}}_p^{(\lambda)}(x) - \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{E}(x^0) \square \mathcal{D}_K^{(\lambda)}(x)$$

gilt.

4. Faltungen

Mit Hilfe der Fouriertransformation ergeben sich für $\text{Re } \lambda > 2$ folgende Faltungsformeln ($H=+,-,K,(1)$; $I, I' = F, \bar{F}, P, R, A$):

$$(AII.65) \quad \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) * \mathcal{D}_H^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{4i\pi^2} \mathcal{S}_I^{(\lambda)}(x) * \mathcal{D}_H^{(\lambda)}(x) * \mathcal{S}_I^{(\lambda)}(x) \\ = \frac{i\pi^2}{(\lambda-2)(\lambda-1)} \mathcal{D}_H^{(\lambda-1)}(x),$$

$$(AII.66) \quad \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) * \mathcal{S}_H^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{4i\pi^2} \mathcal{S}_I^{(\lambda)}(x) * \mathcal{S}_H^{(\lambda)}(x) * \mathcal{S}_I^{(\lambda)}(x) \\ = \frac{i\pi^2}{(\lambda-2)(\lambda-1)} \mathcal{S}_H^{(\lambda-1)}(x).$$

Entsprechend folgt:

$$(AII.67) \quad \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) * \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{4i\pi^2} \mathcal{S}_I^{(\lambda)}(x) * \mathcal{D}_I^{(\lambda)}(x) * \mathcal{S}_I^{(\lambda)}(x) \\ = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \frac{i\pi^2}{(\lambda+z-2)(\lambda+z-1)} \mathcal{D}_I^{(\lambda+z-1)}(x) \stackrel{2a}{=} \dots$$

$$= \begin{cases} \frac{i \pi^{\lambda}}{(\lambda-2) (\lambda-1)} D_I^{(\lambda-1)}(x), & \lambda \neq 3, 4, \dots \\ \frac{i \pi^{\lambda}}{(n-2) (n-1)} D_I^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{\pi^{\lambda} (2n-3) (-\square)^{n-3} \delta^{\lambda}(x)}{4^{n-3} (n-2) [(n-1)!]^2}, & \lambda = n, n = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Wendet man auf (AII.65), (AII.67) den Differentialoperator $\square$ an, so erhält man wieder (AII.44), (AII.40) und (AII.50), wenn man (AII.43) beachtet. Weiter ist

$$\begin{aligned} \text{(AII.68)} \quad D_I^{(\lambda)}(x) * S_I^{(\lambda)}(x) &= \frac{1}{4i \pi^{\lambda}} S_I^{(\lambda)}(x) * S_I^{(\lambda)}(x) * S_I^{(\lambda)}(x) = \\ &= -i \gamma \partial \{ D_I^{(\lambda)}(x) * D_I^{(\lambda)}(x) \} = \\ &= \begin{cases} \frac{i \pi^{\lambda}}{(\lambda-2) (\lambda-1)} S_I^{(\lambda-1)}(x), & \lambda \neq 3, 4, \dots \\ \frac{i \pi^{\lambda}}{(n-2) (n-1)} S_I^{(n-1)}(x) + \frac{\pi^{\lambda} (2n-3) (-i \gamma \partial) (-\square)^{n-3} \delta^{\lambda}(x)}{4^{n-3} (n-2) [(n-1)!]^2}, & \lambda = n, \\ & n = 3, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

5. Spektraldarstellungen

Wir führen zunächst das Funktional

$$\text{(AII.69)} \quad \rho^{(\lambda)}(x') = \frac{1}{4^{\lambda-1} (\lambda-2)! (\lambda-1)!} (x')^{\lambda-2} \Theta(x')$$

ein. Für $1 < \text{Re} \lambda < 2$ stellt es gemäß

$$\text{(AII.70)}^{12)} \quad \rho^{(\lambda)}(x') \langle Z(x') \rangle = \int dx' \rho^{(\lambda)}(x') Z(x')$$

eine reguläre Distribution auf dem Raum aller lokal integrablen Funktionen $Z(x')$ dar, die für $x' \rightarrow \infty$ mindestens wie $\frac{1}{x'^2}$ abfallen. Für die übrigen λ -Werte ist es analog zu (AII.17) erklärt durch die "Res $\frac{1}{z}$ -Vorschrift", d.h. durch

$$\begin{aligned} \text{(AII.71)} \quad \rho^{(\lambda)}(x') \langle Z(x') \rangle &= \int dx' \rho^{(\lambda)}(x') Z(x') = \\ &= \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \rho^{(\lambda+z)}(x') a^{-2z} \langle Z(x') \rangle = \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int dx' \frac{(x')^{\lambda-2} (a' x')^{2z} \Theta(x')}{4^{\lambda+z-1} (\lambda+z-2)! (\lambda+z-1)!} Z(x') \end{aligned}$$

Aus (AII.31) ergibt sich unmittelbar durch Fouriertransformation

$$(AII.72) \quad D_{\pm}^{(\lambda)}(x) \langle \psi(x) \rangle = 4i\pi^4 \int d\alpha' \rho^{(\lambda)}(\alpha') (\Delta_{\pm}(x, \alpha') \langle \psi(x) \rangle),$$

also

$$(AII.73) \quad \frac{1}{4i\pi^4} D_{\pm}^{(\lambda)}(x) = \int d\alpha' \rho^{(\lambda)}(\alpha') \Delta_{\pm}(x, \alpha')$$

und entsprechend

$$(AII.74) \quad \frac{1}{2i\pi^4} D_K^{(\lambda)}(x) = \int d\alpha' \rho^{(\lambda)}(\alpha') \Delta(x, \alpha').$$

Weiter ist, wie beispielsweise aus (AII.20) folgt,

$$(AII.75) \quad \frac{1}{4\pi^4} D_F^{(\lambda)}(x) = \int d\alpha' \rho^{(\lambda)}(\alpha') \Delta_F(x, \alpha')$$

zunächst für $1 < \text{Re} \lambda < 2$; auf Grund der analogen Definitionen von $D_F^{(\lambda)}$ und $\rho^{(\lambda)}$ durch die $\text{Res} \frac{1}{2}$ -Vorschrift gilt (AII.75) für alle λ . Im Impulsraum erhält man daraus die subtraktionsfreie Lehmann-darstellung

$$(AII.76) \quad \frac{1}{4\pi^4} D_F^{(\lambda)}(p) = \int d\alpha' \rho^{(\lambda)}(\alpha') \frac{1}{\alpha'^2 - p^2 - i0}$$

die aber nur wegen der Definition (AII.71) sinnvoll ist; als klassisches Integral aufgefaßt, wäre die rechte Seite von (AII.76) für $\text{Re} \lambda > 2$ divergent. Analoge Formeln lassen sich für die übrigen $D_I^{(\lambda)}$ angeben:

$$(AII.77) \quad \frac{1}{4\pi^4} D_I^{(\lambda)}(x) = \int d\alpha' \rho^{(\lambda)}(\alpha') \Delta_I(x, \alpha'), \quad I=F, \bar{F}, P, R, A.$$

Durch Differentiation gewinnt man die analogen Darstellungen für die Spinorfunktionen:

$$(AII.78) \quad \frac{1}{4i\pi^4} S_I^{(\lambda)}(x) = \int d\alpha' \rho^{(\lambda)}(\alpha') (-i\gamma\partial) \Delta_I(x, \alpha'),$$

$$(AII.79) \quad \frac{1}{2i\pi^4} S_K^{(\lambda)}(x) = \int d\alpha' \rho^{(\lambda)}(\alpha') (-i\gamma\partial) \Delta(x, \alpha'),$$

$$(AII.80) \quad \frac{1}{4\pi^4} S_I^{(\lambda)}(x) = \int d\alpha' \rho^{(\lambda)}(\alpha') (-i\gamma\partial) \Delta_I(x, \alpha'), \quad I=F, \bar{F}, P, R, A.$$

Für $\lambda \neq 2, 3, \dots$ sind die Spektraldarstellungen (AII.77), (AII.80) mit folgenden äquivalent:

$$(AII.81) \quad \frac{1}{4\pi^4} \left\{ \begin{matrix} D_I^{(\lambda)}(x) \\ S_I^{(\lambda)}(x) \end{matrix} \right\} = \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} \int d\alpha' \rho^{(\lambda)}(\alpha') (\alpha' \alpha')^z \left\{ \begin{matrix} \Delta_I(x, \alpha') \\ (-i\gamma\partial) \Delta_I(x, \alpha') \end{matrix} \right\}.$$

Ähnliche Überlegungen lassen sich für die in (AII.18) definierten Größen durchführen: Erklärt man

$$(AII.82) \quad \bar{S}^{(\lambda)}(x') < Z(x') > = \int dx' \bar{S}^{(\lambda)}(x') Z(x') = \\ = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \int dx' \bar{S}^{(\lambda)}(x') (a' x')^z Z(x'),$$

so hat man für alle λ die gegenüber (AII.77) einfachere und leichter auf beliebige Spektralfunktionen zu verallgemeinernde Lehmandarstellung

$$(AII.83) \quad \frac{i}{4\pi} \bar{D}_I^{(\lambda)}(x) = \int dx' \bar{S}^{(\lambda)}(x') \Delta_I(x, x') = \\ = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \int dx' \bar{S}^{(\lambda)}(x') (a' x')^z \Delta_I(x, x'),$$

die für $I=F$ im Impulsraum die Gestalt

$$(AII.84) \quad \frac{i}{4\pi} \bar{D}_F^{(\lambda)}(p) = \frac{1}{4^{\lambda-1} (\lambda-1)! (\lambda-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \int dx' (x')^{\lambda-1} (a' x')^z \theta(x') \frac{1}{x'-p-i0}$$

annimmt. Durch Differentiation findet man die Spektraldarstellung der $\bar{S}_I^{(\lambda)}$:

$$(AII.85) \quad \frac{i}{4\pi} \bar{S}_I^{(\lambda)}(x) = \lim_{z \rightarrow 0} \int dx'^2 \bar{S}^{(\lambda)}(x') (a' x')^z (-i \delta \partial) \Delta_I(x, x').$$

Wir sehen hier, daß wir statt durch (AII.18) die Funktionale $\bar{D}_I^{(\lambda)}$, $\bar{S}_I^{(\lambda)}$ in natürlicherer Weise durch (AII.83), (AII.85) definieren könnten. Sie sind gegenüber $D_I^{(\lambda)}$, $S_I^{(\lambda)}$ neben der einfacheren Lehmandarstellung dadurch ausgezeichnet, daß ihre Differentiations- und Faltungsformeln keine am Ursprung lokalisierten Terme enthalten und die ihnen zugeordneten Renormierungsfaktoren stets gleich 1 werden.

AIII. Hochenergieabschätzung der Spektralfunktionen und Kausalität im eindimensionalen Beispiel

Wir beweisen hier die eindimensionalen Analoga der ersten zwei Theoreme aus Kap. II. Im Minkowskiraum haben wir

$$(AIII.1) \quad \Delta'(x) = \Delta'_+(x) + \Delta'_-(x),$$

$$2\pi \mathcal{F}_\pm(p) = 2\pi \Theta(\pm p^0) \mathcal{F}(p^0) = \pm i \mathcal{F} \Delta'_\pm(x).$$

$\mathcal{F}_\pm(p)$ ist also im vorderen Lichtkegel konzentriert. Zur Übertragung auf den eindimensionalen Fall identifizieren wir den Zukunfts- bzw. Vergangenheitskegel mit der reellen positiven bzw. negativen Achse. Für die genaue Formulierung der Theoreme sind einige Definitionen nötig:

1) Mit $\tilde{\Omega}$ bezeichnen wir den Raum aller für $p^0 > 0$ und $p^0 < 0$ stetig differenzierbaren Funktionen $\psi(p)$, die den Bedingungen

$$(AIII.2) \quad \psi(p) e^{\eta|p|} \rightarrow 0, \quad \psi'(p) e^{\eta|p|} \rightarrow 0, \quad |p| \rightarrow \infty, \quad \eta < \eta'$$

mit geeignetem $\eta' > 0$ genügen. Ω ist der Raum der Fouriertransformierten der $\psi(p) \in \tilde{\Omega}$, der also aus Funktionen $\psi(x)$ besteht, die für $|\operatorname{Im} x| < \eta'$ mit geeignetem $\eta' > 0$ analytisch sind und für $|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty$ mindestens wie $\frac{1}{|x|}$ abfallen¹³⁾.

2) Konvergenz in Ω (damit auch in $\tilde{\Omega}$) ist folgendermaßen erklärt: Eine Folge ψ_n heißt Nullfolge, wenn

- a) alle ψ_n in einem gemeinsamen Gebiet $|\operatorname{Im} x| < \eta', \eta' > 0$ analytisch sind,
- b) die ψ_n in jedem beschränkten und abgeschlossenen Teil des gemeinsamen Analytizitätsgebiets gleichmäßig gegen Null konvergieren und
- c) wenn

$$(AIII.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int dx \frac{|\psi_n(x)|}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} = 0$$

gilt für geeignetes $\epsilon > 0$.

3) Da für stetige Funktionen $\mathcal{F}(p)$ die Beziehung

$$(AIII.4) \quad \mathcal{F}(p) e^{-\eta p} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty, \quad \eta > 0 \text{ beliebig}$$

gleichbedeutend ist mit der Existenz von

$$(AIII.5) \quad \int dp \mathcal{F}(p) \psi(p) \Theta(p), \quad \psi(p) \in \tilde{\Omega},$$

definieren wir für beliebige Distributionen $g \in \mathcal{D}'$:

$$(AIII.6) \quad g(p) e^{-\eta p} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty, \quad \eta > 0 \text{ beliebig}$$

soll bedeuten, daß $g(p) \langle \varphi(p) \rangle$ für alle $\varphi(p) \in \tilde{\Omega}$ existiert.

4) Weiter erklären wir: Ein Funktional $W(x) \in \mathcal{L}'$ hat als Träger die reelle Achse, falls es erweiterbar ist zu einem linearen und stetigen Funktional über Ω .

Das Analogon zu Theorem 1 läßt sich nun so formulieren:

Theorem 6: Hat $\Delta'(x) \in \mathcal{L}'$ als Träger die reelle Achse, so existieren Funktionale $\Delta'_\pm$, die erzeugt werden durch die für $\eta > 0$ analytischen Funktionen $\Delta'_\pm(x \mp i\eta)$:

$$(AIII.7) \quad \Delta'_\pm(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int dx \Delta'_\pm(x \mp i\eta) \varphi(x \mp i\eta).$$

Es gilt:

$$(AIII.8) \quad \Delta'(x) = \Delta'_+(x) + \Delta'_-(x).$$

Seien $\varphi_\pm$ die Fouriertransformierten von $\Delta'_\pm$:

$$(AIII.9) \quad 2\pi \varphi_\pm(\pm p) = \pm i \mathcal{F} \Delta'_\pm(x).$$

Dann ist

$$(AIII.10) \quad \varphi_\pm(p) = 0 \quad \text{für } p < 0 \text{ und } \varphi_\pm(p) e^{-\eta p} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty, \quad \eta > 0 \text{ beliebig}$$

Zum Beweis gehen wir aus von der Tatsache, daß für alle x und für $\eta > 0$ die Funktion

$$(AIII.11) \quad \frac{1}{2\pi} \Theta(\pm p) e^{-ip(x \mp i\eta)}$$

in $\tilde{\Omega}$, ihre Fouriertransformierte (als Funktion von x')

$$(AIII.12) \quad \pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x \mp i\eta - x'}$$

also in Ω liegt. Somit existiert

$$(AIII.13) \quad \Delta'_\pm(x \mp i\eta) = \pm k(x \mp i\eta) = \Delta'(x') \langle \pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x \mp i\eta - x'} \rangle.$$

Da der Differenzenquotient von $\frac{1}{x \mp i\eta - x'}$ bezüglich $x \mp i\eta$ gleichmäßig in x gegen den Differentialquotienten strebt, geht der Differenzenquotient von $\Delta'_\pm(x \mp i\eta)$ gegen

$$(AIII.14) \quad \Delta'(x') \langle \pm \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d(x \mp i\eta)} \frac{1}{x \mp i\eta - x'} \rangle.$$

$\Delta'_\pm(x \mp i\eta)$ ist also analytisch für $\eta > 0$. Für $\epsilon > 0$ bildet die Folge

$$(AIII.15) \quad \frac{(x_m + i\eta)^{1-f}}{x_m + i\eta - x'}, \quad x_m \rightarrow \infty, \quad \lim x_m > 0$$

eine Nullfolge, so daß

$$(AIII.16) \quad \Delta'_\pm(x + i\eta)(x + i\eta)^{1-f} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \lim x > 0$$

gilt für alle $f > 0$. Das Funktional

$$(AIII.17) \quad \Delta'_\pm(x) \langle \psi(x) \rangle = \int dx \Delta'_\pm(x + i\eta) \psi(x + i\eta)$$

existiert also für $\psi(x) \in \Omega$ und ist unabhängig von η wegen des raschen Abfallens des Integranden nach (AIII.16). Zudem ist es stetig, d.h. mit $\psi_m \rightarrow 0$ geht auch $\Delta'_\pm(x) \langle \psi(x) \rangle$ gegen Null. Weiter ist

$$(AIII.18) \quad \{\Delta'_+(x) + \Delta'_-(x)\} \langle \psi(x) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int dx \Delta'_+(x') \left\langle \frac{\psi(x-i\eta)}{x-i\eta-x'} \right\rangle - \int dx \Delta'_-(x') \left\langle \frac{\psi(x+i\eta)}{x+i\eta-x'} \right\rangle \right\}$$

Ersetzt man hier die Integrale durch ihre Näherungssummen und berücksichtigt ihre gleichmäßige Konvergenz in jedem beschränkten x' -Bereich, so erhält man

$$(AIII.19) \quad \{\Delta'_+(x) + \Delta'_-(x)\} \langle \psi(x) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \Delta'_\pm(x') \left\langle \int dx \frac{\psi(x-i\eta)}{x-i\eta-x'} - \int dx \frac{\psi(x+i\eta)}{x+i\eta-x'} \right\rangle$$

Wegen des Abfallens von ψ im Unendlichen ist nach Cauchy die rechte Seite von (AIII.19) gleich $\Delta'_\pm \psi$, so daß sich (AIII.8) ergibt. Sei nun $\psi(p) = 0$ für $p > 0$, dann ist die zugehörige Fouriertransformierte $\psi(x)$ analytisch für $\text{Im } x < \eta'$ mit geeignetem $\eta' > 0$. Somit gilt

$$(AIII.20) \quad 2\pi \mathcal{F}_\pm(p) \langle \psi(p) \rangle = \pm i \Delta'_\pm(x) \langle \psi(\pm x) \rangle = \\ = \pm i \int dx \Delta'_\pm(x + i\eta) \psi(\pm x - i\eta),$$

wobei wegen der Analytizität des Integranden und des Abfallens im Unendlichen der Integrationsweg geschlossen werden kann, so daß sich

$$(AIII.21) \quad \mathcal{F}_\pm(p) \langle \psi(p) \rangle = 0,$$

also der erste Teil von (AIII.10) ergibt. Da $\Delta'_\pm$ auf ganz Ω definiert ist, ist $\mathcal{F}_\pm(p)$ auf $\tilde{\Omega}$ erklärt, womit der zweite Teil von (AIII.10) bewiesen ist.

Zu bemerken ist noch Folgendes: Mit k aus (AIII.13) läßt sich $\Delta'_\pm$ darstellen in der Form

$$(AIII.22) \quad \Delta'_\pm(x) \langle \psi(x) \rangle = \int_{C_k} dx k(x) \psi(x),$$

wobei die Kurve C_k aus Fig. 20 beliebig nahe der reellen Achse verlaufen kann; hieraus geht wiederum hervor, daß Δ' als Träger die reelle Gerade besitzt.

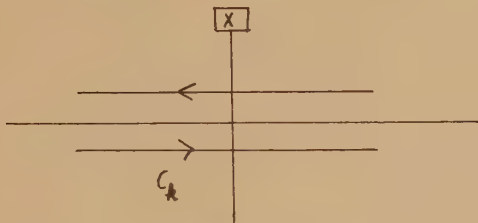


Fig. 20

Das eindimensionale Analogon zu Theorem 2 aus Kap. II lautet:
Theorem 7: Erfüllen $\varphi_{\pm}$ die Bedingungen (AIII.10), so werden die inversen Fouriertransformierten

$$(AIII.23) \quad \Delta'_{\pm}(x) = \mp 2\pi i \mathcal{F}^{-1} \varphi_{\pm}(p)$$

erzeugt durch für $\eta > 0$ analytische Funktionen gemäß (AIII.17).

Ihre Summe

$$(AIII.24) \quad \Delta'(x) = \Delta'_+(x) + \Delta'_-(x)$$

ist auf der reellen Achse konzentriert.

Es gilt nämlich für genügend kleines $\eta > 0$

$$\begin{aligned} (AIII.25) \quad \Delta'_{\pm}(x) \langle \varphi(x) \rangle &= \mp 2\pi i \varphi_{\pm}(p) \langle \varphi(\pm p) \rangle = \mp 2\pi i \varphi_{\pm}(p) \langle \Theta(p) \varphi(\pm p) \rangle = \\ &= \mp i \varphi_{\pm}(p) \langle \int dx \varphi(x \mp i\eta) e^{\mp i p(x \mp i\eta)} \Theta(p) \rangle = \\ &= \int dx \Delta'_{\pm}(x \mp i\eta) \varphi(x \mp i\eta), \end{aligned}$$

wobei

$$(AIII.26) \quad \varphi_{\pm}(p) \langle e^{\mp i p(x \mp i\eta)} \Theta(p) \rangle = \pm i \Delta'_{\pm}(x \mp i\eta) = i k(x \mp i\eta)$$

für $\eta > 0$ analytische Funktionen sind, was ähnlich wie in Theorem 6 bewiesen wird. Zudem ist

$$(AIII.27) \quad \Delta'(x) \langle \varphi(x) \rangle = \int_{C_k} dx k(x) \varphi(x).$$

Für die Kurve C_k gilt das oben Gesagte, so daß damit die Behauptung bewiesen ist.

Zur Illustration von Theorem 6 und 7 geben wir folgende Beispiele:

1) Für die Spektralfunktionen

$$(AIII.28) \quad \varrho_{\pm}(p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} p^n \theta(p),$$

die bezüglich der Variablen p^2 die Wachstumsordnung $1/4 < 1/2$ besitzen, sind

$$(AIII.29) \quad \Delta'_{\pm}(x \mp i\eta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{x \mp i\eta} e^{\frac{\mp i}{x \mp i\eta}}$$

für $\eta > 0$ analytische Funktionen, die im Unendlichen mindestens wie $\frac{1}{|x \mp i\eta|}$ abfallen. Der zugehörige Kommutator

$$(AIII.30) \quad \Delta'(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \{ \Delta'_+(x-i\eta) + \Delta'_-(x+i\eta) \} = -\frac{1}{\pi x} \cos \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n+1)!]} \delta^{(2n+1)}(x)$$

hat als Träger die reelle Achse.

2) Die Funktionen

$$(AIII.31) \quad \varrho_{\pm}(p) = \frac{1}{2\pi} e^p \theta(p)$$

verletzen die Bedingung (AIII.10) "gerade noch": Ihre Wachstumsordnung bezüglich p^2 ist zwar nur $1/2$, doch ist der Wachstumstyp $= 1 > 0$. Die entsprechenden Wightmanfunktionen

$$(AIII.32) \quad \Delta'_{\pm}(x \mp i\eta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{x \mp i\eta \pm i}$$

haben einen Pol bei $x=0$, $\eta=1$, sind also nicht mehr analytisch in der gesamten Halbebene $\eta > 0$. Der Träger des Kommutators

$$(AIII.33) \quad \Delta'(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2i} \{ \delta(x+i) - \delta(x-i) \}$$

besteht nicht nur aus der reellen Achse, sondern außerdem noch aus den Punkten $\pm i$ der komplexen x -Ebene.

3) Für

$$(AIII.34) \quad \varrho_{\pm}(p) = \frac{1}{2\pi} p e^{\frac{p^2}{2}} \theta(p)$$

ist die Bedingung (AIII.10) stark verletzt (Wachstumsordnung $= 1$). Der zugehörige Kommutator

$$(AIII.35) \quad \Delta(x) \langle \psi(x) \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x \, e^{ix'} \psi(x)$$

erweist sich als analytisches Funktional, dessen Träger nicht mehr die reelle, sondern die imaginäre x-Achse ist.

AIV. Integralgleichungen für Matrixelemente

Wir gehen aus von den Differentialgleichungen für die Feldoperatoren:

$$(AIV.1) \quad \vec{D}\Psi = \vec{f}, \quad D = i\partial - m, \\ \bar{\Psi} \gamma^0 \vec{D}^\dagger \gamma^0 = \bar{\vec{f}}, \quad \gamma^0 D^\dagger \gamma^0 = -i\partial - m,$$

die den Integralgleichungen

$$(AIV.2) \quad \Psi(x) = \Psi_0(x) + \int_I(x, m') * \vec{f}(x), \\ \bar{\Psi}(x) = \bar{\Psi}_0(x) + \bar{\vec{f}}(x) * \gamma^0 \int_I^\dagger(x, m') \gamma^0$$

entsprechen, wobei

$$(AIV.3) \quad \Psi_0(x) = -i \int d\bar{y} \gamma(y) S_I(x-y, m') \gamma^\mu \Psi(y), \\ \bar{\Psi}_0(x) = i \int d\bar{y} \gamma(y) \bar{\Psi}(y) \gamma^\mu \gamma^0 \int_I^\dagger(x-y, m') \gamma^0$$

ist und S_I eine Greenfunktion von (AIV.1) darstellt:

$$(AIV.4) \quad S_I(x, m') \vec{D}_x = \delta^4(x).$$

Für $S_I = S_R, S_A, S_F$ mit der Randbedingung

$$(AIV.5) \quad \Psi \rightarrow \Psi_{in}^{out}, \quad x^0 \rightarrow \mp \infty$$

erhält man den üblichen LSZ-Formalismus:

$$(AIV.6) \quad \Psi(x) = \Psi_{in}^{out}(x) + \int_A(x, m') * \vec{f}(x), \\ \bar{\Psi}(x) = \bar{\Psi}_{in}^{out}(x) + \bar{\vec{f}}(x) * \int_A(-x, m'), \\ \Psi(x) = \Psi_{in}^+(x) + \Psi_{out}^-(x) + \int_F(x, m') * \vec{f}(x), \\ \bar{\Psi}(x) = \bar{\Psi}_{in}^+(x) + \bar{\Psi}_{out}^-(x) + \bar{\vec{f}}(x) * \int_F(-x, m').$$

("+", "-" kennzeichnen die positiven und negativen Frequenzanteile der Feldoperatoren). Aus den Operatorgleichungen (AIV.6) folgen unmittelbar Integralgleichungen für Matrixelemente der Form

$$(AIV.7) \quad \langle q | \Psi(x) | p \rangle, \quad \langle q | \bar{\Psi}(x) | p \rangle.$$

Für Matrixelemente höherer Ordnung gehen wir entsprechend vor. Bezeichnen wir mit Π das Operatorprodukt

$$(AIV.8) \quad \Pi(x, y) = \Phi(x) \bar{\Psi}(y) u_1(x, y) - \bar{\Psi}(y) \Phi(x) u_2(x, y),$$

so erhalten wir

$$(AIV.9) \quad \begin{aligned} \Pi(x, y) = & - \int d\zeta_\mu(u) d\zeta_\nu(v) S_I(x-u, m') \gamma^\mu \Pi(u, v) \gamma^\nu \gamma^0 S_I^\dagger(y-v, m') \gamma^0 + \\ & + i \int d\zeta_\nu(v) \Pi(x, v) \gamma^\nu \gamma^0 S_I^\dagger(y-v, m') \gamma^0 - \\ & - i \int d\zeta_\mu(u) S_I(x-u, m') \gamma^\mu \Pi(u, y) + \\ & + S_I(x, m') * \vec{D}_x \Pi(x, y) \gamma^0 \vec{D}_y^\dagger \gamma^0 * \gamma^0 S_I^\dagger(y, m') \gamma^0. \end{aligned}$$

Für $u_1=1$, $u_2=0$, $S_I=S_R$ und der Randbedingung (AIV.5) ergibt sich

$$(AIV.10) \quad \begin{aligned} [\Psi(x) - \Psi_m^-(x)] [\bar{\Psi}(y) - \bar{\Psi}_m^-(y)] = \\ = S_R(x, m') * \tilde{f}(x) \tilde{f}(y) * S_A(-y, m') \end{aligned}$$

und hieraus in der String- bzw. Leiterapproximation die Gleichungen (IV.8), (IV.18) für S_+^1 bzw. χ_+ . Analog erhalten wir für $u_1=0$, $u_2=-1$, $S_I=S_R$

$$(AIV.11) \quad \begin{aligned} [\bar{\Psi}(y) - \bar{\Psi}_m^-(y)] [\Psi(x) - \Psi_m^-(x)] = \\ = S_R(x, m') * \tilde{f}(y) \tilde{f}(x) * S_A(-y, m'), \end{aligned}$$

daraus in der String- und Leiterapproximation die Gleichungen (IV.8), (IV.18) für S_-^1 und χ_- . (AIV.10), (AIV.11) hätte man natürlich auch durch Multiplikation der Gleichungen (AIV.6) gewinnen können. Für $u_1=\Theta(x^0-y^0)$, $u_2=\Theta(y^0-x^0)$, $S_I=S_F$ folgt

$$(AIV.12) \quad \begin{aligned} T \{ [\Psi(x) - \Psi_m^+(x) - \Psi_{out}^-(x)] [\bar{\Psi}(y) - \bar{\Psi}_m^+(y) - \bar{\Psi}_{out}^-(y)] \} = \\ = S_F(x, m') * \vec{D}_x T \{ \Psi(x) \bar{\Psi}(y) \} \gamma^0 \vec{D}_y^\dagger \gamma^0 * S_F(-y, m'). \end{aligned}$$

Im Rahmen der String- und Leiterapproximation schließt man hieraus auf die Gleichungen (IV.9) und (IV.19) für die zeitgeordneten Matrixelemente.

AV. LSZ-Formalismus für Fermionen

Im wesentlichen verwenden wir für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die Bezeichnungsweise von Schweber((19)). Die grundlegende Relation ist

$$(AV.1) \quad b_{out}^s(\vec{p}) - b_{in}^s(\vec{p}) = i \int dx^\mu \partial_\mu b^s(\vec{p}, \zeta(x)),$$

wobei das Integral über einen zeitartigen Weg ($dx^\mu dx_\mu > 0$, $dx^0 > 0$) zu erstrecken ist. Weiter gilt nach Definition (vgl. Fig. 4)

$$(AV.2) \quad |\bar{A}(2) A(1)\rangle = d_{in}^\dagger(2) |A_{in}(1)\rangle = d_{in}^\dagger(2) b_{in}^\dagger(1) |0\rangle.$$

Die Argumente "1", "2" stehen als Abkürzung für p_1, s_1 bzw. p_2, s_2 . Wir erhalten somit für das S-Matrix-Element

$$(AV.3) \quad \langle A(3) \bar{A}(4) | S | \bar{A}(2) A(1) \rangle = \langle A(3) \bar{A}(4) | \bar{A}(2) A(1) \rangle$$

unter Verwendung von (AV.1) mit d statt b

$$(AV.4) \quad \langle A_{out}(3) | A_{in}(1) \rangle \langle \bar{A}_{in}(4) | A_{in}(2) \rangle + \int dx^\mu \partial_\mu \langle A_{out}(3) | d^s(\vec{p}_4, \zeta(x)) | \bar{A}_{in}(2) A_{in}(1) \rangle$$

Nun läßt sich nachweisen, daß gilt:

$$(AV.5) \quad \langle A(3) | A(1) \rangle - \langle A(3) | A(1) \rangle = 0.$$

Physikalisch ist das klar, da bei Vorhandensein nur eines Teilchens keine Streuung erfolgt. Der mathematische Beweis benutzt den Zusammenhang der im Impulsraum definierten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $b^\dagger, d^\dagger, b, d$ mit den Feldoperatoren $\Psi, \bar{\Psi}$, z.B.

$$(AV.6) \quad b^s(\vec{p}, \zeta(x)) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}} \int d\zeta_\mu(x) \tilde{u}_+^s(\vec{p}) e^{ipx} \gamma^\mu \Psi(x),$$

$$p = (E(\vec{p}), \vec{p}), \quad E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Für die linke Seite von (AV.5) erhält man somit unter Benutzung von

$$(AV.7) \quad \tilde{u}_+^s(\vec{p}) e^{ipx} (-i \not{\partial} + m) = 2m \tilde{u}_+^s(\vec{p}) e^{ipx}$$

nach partieller Integration

$$(AV.8) \quad \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p}_3)}} \left\{ -i \int d\vec{\sigma}_\mu(x) \tilde{u}_+^{s_3}(\vec{p}_3) e^{ip_3 x} \gamma^\mu \vec{D}_x <0| \Psi(x) | A_{in}(1) > - \int dx \tilde{u}_+^{s_3}(\vec{p}_3) e^{ip_3 x} <0| (\vec{\square} + m^2) \Psi(x) | A_{in}(1) > \right\}.$$

Der Oberflächenterm verschwindet wegen (AIV.5). Der Integrand des zweiten Summanden läßt sich auf Grund von

$$(AV.9) \quad i [P_\mu, \Psi(x)]_- = \partial_\mu \Psi(x), \quad <0| P_\mu = 0$$

(P_μ ist der Energie-Impuls-Operator) umformen zu

$$(AV.10) \quad \dots <0| \Psi(x) (P_\mu P^\mu - m^2) | A_{in}(1) >$$

und verschwindet auf der Massenschale $p_1^2 = m^2$. Also gilt wegen der zu (AV.6) analogen Formel für d statt δ die Beziehung

$$(AV.11) \quad <A_{in}(3) \bar{A}_{in}(4) | S - 1 | \bar{A}_{in}(2) A_{in}(1) > = \\ = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p}_4)}} \int d\gamma^\mu \partial_\mu \int d\vec{\sigma}_\nu(y) <A_{out}(3) | \bar{\Psi}(y) | \bar{A}_{in}(2) A_{in}(1) > \gamma^\nu u_{(-\vec{p}_4)}^{s_4} e^{ip_4 y}.$$

Die Integration über den zeitartigen Weg und die zu jedem Punkt dieses Wegs raumartig liegenden Flächen $\mathcal{G}(y)$ lassen sich zu einer vierdimensionalen Integration zusammenfassen. Da zudem $u_{(-\vec{p}_4)}^{s_4} e^{ip_4 y}$ eine Lösung der freien Diracgleichung darstellt, ergibt sich schließlich für die linke Seite von (AV.11):

$$(AV.12) \quad \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p}_4)}} \int d\gamma <A_{out}(3) | \bar{\Psi}(y) | \bar{A}_{in}(2) A_{in}(1) > \gamma^\mu \vec{D}_y^\dagger \gamma^\mu u_{(-\vec{p}_4)}^{s_4} e^{ip_4 y}.$$

Schreibt man

$$(AV.13) \quad <A_{out}(3) | = <0| b_{out}(3)$$

und benutzt Formel (AV.6) unter Beachtung von

$$(AV.14) \quad b_{out}^s(\vec{p}) = b^s(\vec{p}, \mathcal{G}(x)_{x^0 \rightarrow +\infty})$$

so folgt für (AV.12):

$$(AV.15) \quad \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p}_3)}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p}_4)}} \int_{x^0 \rightarrow +\infty} d\vec{\sigma}_\mu(x) d\gamma e^{ip_3 x} e^{ip_4 y} \cdot \tilde{u}_+^{s_3}(\vec{p}_3) \gamma^\mu <0| \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | \bar{A}_{in}(2) A_{in}(1) > \gamma^\nu \vec{D}_y^\dagger \gamma^\nu u_{(-\vec{p}_4)}^{s_4}.$$

Der Unterschied von (AV.15) zu einem ähnlichen Integral, in dem statt der nicht zeitgeordneten Amplitude χ_+ aus (IV.14) die ent-

sprechende Bethe-Salpeter-Amplitude χ_F aus (IV.15) (jeweils mit Ψ statt Ψ_A) steht, dafür aber zusätzlich über die Fläche $x^0 = -$ integriert wird, ist Null, was man ähnlich wie für die linke Seite von (AV.5) nachweist. Formt man dieses Integral in gleicher Weise wie (AV.11) um, erhält man schließlich als Ergebnis

$$(AV.16) \quad \langle A_{\underline{m}}(3) \bar{A}_{\underline{m}}(4) | S - 1 | \bar{A}_{\underline{m}}(2) A_{\underline{m}}(1) \rangle = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p}_3)}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p}_4)}} \int dx dy e^{ip_3 x} e^{ip_4 y} \cdot \\ \cdot \tilde{u}_+^{s_3}(\vec{p}_3) \vec{D}_x \langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | \bar{A}_{\underline{m}}(2) A_{\underline{m}}(1) \rangle \delta^0 \vec{D}_y^T \delta^0 u_-^{s_4}(-\vec{p}_4).$$

Wegen

$$(AV.17) \quad \langle 0 | T \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | \bar{A}_{\underline{m}}(2) A_{\underline{m}}(1) \rangle = f_F(x-y) e^{-i(p_1+p_2)(\frac{x+y}{2})}$$

und mit der Definition

$$(AV.18) \quad S = 1 + 2\pi i \delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) T$$

für die T-Matrix ergibt sich:

$$(AV.19) \quad \langle A_{\underline{m}}(3) \bar{A}_{\underline{m}}(4) | T | \bar{A}_{\underline{m}}(2) A_{\underline{m}}(1) \rangle = \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p}_3)}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p}_4)}} \tilde{u}_+^{s_3}(\vec{p}_3) t(p') u_-^{s_4}(-\vec{p}_4)$$

wobei t gegeben ist durch

$$(AV.20) \quad i t(p') = \int dx e^{ip'x} (i \gamma \vec{\partial} - m + \gamma \frac{P}{2}) f_F(x) (i \gamma \vec{\partial} - m - \gamma \frac{P}{2}) = \\ = \mathcal{F} \left\{ (i \gamma \vec{\partial} - m + \gamma \frac{P}{2}) f_F(x) (i \gamma \vec{\partial} - m - \gamma \frac{P}{2}) \right\}.$$

Im Fall verschwindender Gesamtenergie $P=0$ ist also der pseudoskalare Amplitudenanteil

$$(AV.21) \quad i \tau(p') = -(2\pi)^3 \mathcal{F} \{ i \gamma_5 t(p') \}$$

von der Form

$$(AV.22) \quad i \tau(p') = \int dx e^{ip'x} (\vec{\square} + m^2) \varphi_F(x); \quad \varphi_F(x) = -(2\pi)^3 \mathcal{F} \{ i \gamma_5 f_F(x) \}$$

In der Leiterapproximation berechnet sich wegen (IV.17) t zu:

$$(AV.23) \quad i t(p') = -g \int dx e^{ip'x} T V_F(x, m_B^2) f_F(x) T;$$

für $P=0$ und pseudoskalare Kopplung gilt wegen (IV.22):

$$(AV.24) \quad i \tau(p') = g \int dx e^{ip'x} V_F(x, m_B^2) \varphi_F(x).$$

Fußnoten

- 1) Den Ausdruck "Distribution" verwenden wir synonym mit "verallgemeinerter Funktion", also nicht nur für Elemente aus $\mathcal{D}'$.
- 2) Notation siehe Anhang I.
- 3) Zur Definition dieser Räume vgl. Ref.((5)).
- 4) Die hier auftretenden Funktionale sind in Anhang II definiert; vgl. auch Kap. IV.
- 5) Der Fall masseloser Teilchen stellt insofern eine Besonderheit dar, als hier der (Anti-)Kommutator nicht wie bei massiven Teilchen im gesamten Lichtkegel $x^2 > 0$, sondern nur auf dessen Rand $x^2 = 0$ lokalisiert ist. Dies ist eine Folge der Tatsache, daß die durch Erzeugung und Vernichtung von Masse-Null-Teilchen bewirkte Felderregung sich mit Lichtgeschwindigkeit, also nur längs des Bereichs $x^2 = 0$ ausbreitet.
- 6) Für zwei Vektoren $\eta, \eta' \in L^+ = \{\eta: \eta^0 > 0, \eta^i > 0\}$ soll $\eta < \eta'$ bedeuten: $\eta^0 < \eta'^0$ und $\eta^i < \eta'^i$.
- 7) Dies gilt auch für den allgemeinen Fall einer nicht kanonischen Regularisierung, sofern die Koeffizienten $d_i = d_i(\lambda)$ so gewählt werden, daß sie für $\lambda \rightarrow \infty$ genügend stark gegen Null gehen.
- 8) Wir setzen renormierte Feldoperatoren voraus:

$$\Delta' \rightarrow \Delta, \quad S' \rightarrow S, \quad x^0 \rightarrow x, \infty,$$

so daß δ, δ_A als ersten Term des freien Propagators, nämlich

$$\delta(x^2) = \frac{1}{(\lambda-2)!} (x^2)^{\lambda-2} \theta(x^2) \Big|_{\lambda=1}$$

enthalten muß.

- 9) Dabei ist

$$\sqrt{-i \frac{3}{4} \Delta^{(e)}} = \sqrt{\left| \frac{3}{4} \Delta^{(e)} \right|} \exp \left(\frac{i}{2} \arg \left(-i \frac{3}{4} \Delta^{(e)} \right) \right),$$

so daß der Realteil des Exponenten in (IV.55) stets ≤ 0 ist.

- 10) Über Lösungsmethoden vgl. Ref.((14)).

- 11) Der Streifen $\text{Re } \lambda < 1+2$ liegt sowieso im Analytizitätsbereich von $v_i^{(\lambda)}$ aus (V.71), so daß hier (V.76) trivialerweise gilt.
- 12) Die Integraldarstellung (AII.70) ist an sich nur für $1 < \text{Re } \lambda < 2$ sinnvoll, doch ist wegen (III.7) $\rho^{(\lambda)}$ für $1 \leq \text{Re } \lambda < 2$ ohne Regularisierungsvorschrift definierbar.

- 13) Da die Variablen p, x im eindimensionalen Fall den 0.ten Komponenten p^0, x^0 der Vierervektoren p, x zugeordnet sind, ist Fouriertransformation und ihre Inversion hier sinnvollerweise erklärt durch

$$\varphi(x) = \tilde{F}\varphi(p) = \int dp e^{ipx} \varphi(p),$$

$$\varphi(p) = \tilde{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ipx} \varphi(x).$$

Referenzen

- (1) G. Feinberg und A. Pais, Phys. Rev. 131, 2724 (1963);
Phys. Rev. 133, B477 (1964)
T.D. Lee, Phys. Rev. 128, 899 (1962)
H.M. Fried, Phys. Rev. 133, B1562 (1964)
R.F. Sawyer, Phys. Rev. 134, B448 (1964)
B. Schroer, J. Math. Phys. 5, 1361 (1964)
B. Schroer und K. Bardakci, Preprints, Universität Pittsburgh (1965);
J. Math. Phys. 7, 10, 16 (1966)
G. Domokos und P. Suranyi, Preprints, Cern (1964)
B.A. Arbuzov und A.T. Filippov, Nuovo Cimento 38, 796 (1965)
W. Güttinger, R. Penzl und E. Pfaffelhuber, Ann. Phys. (N.Y.) 33, 246 (1965)
W. Güttinger, Nuovo Cimento 10, 1 (1958);
Nucl. Phys. 9, 429 (1959)
M.B. Halpern, Phys. Rev. 140, B1576 (1965)
A.P. Contogouris, Nuovo Cimento 37, 1712 (1965);
Preprints, Cern (1965)
- (2) M.B. Halpern, Preprint, University of California, Berkeley (1966)
- (3) H. Lehmann, Nuovo Cimento 11, 342 (1954)
- (4) G. Källen, Helv. Phys. Acta 25, 417 (1952)
- (5) W. Güttinger, Generalized Functions and Dispersion Relations in Physics, Fortschr. d. Phys., im Druck
I.M. Gelfand, G.E. Shilov et al., Generalized Functions, New York 1964
L. Schwartz, Theorie des Distributions, Paris 1951
A. Rieckers, Lorentzinvariante Distributionen, Universität München (1966)
- (6) W. Güttinger, Ref.((1)) (1958/59)
- (7) S. Okubô, Nuovo Cimento 19, 574 (1961)
- (8) G. Barton, Dispersion Techniques in Field Theory, New York 1966
- (9) W. Güttinger, R. Penzl und E. Pfaffelhuber, Ref.((1)) (1965)

- ((10)) H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann, Nuovo Cimento 1, 1425 (1955)
Nuovo Cimento 6, 319 (1957)
- ((11)) R.E. Cutkosky, Lectures on Analytic Properties of the S-Matrix in Perturbation Theory, Universität Kopenhagen (1962)
- ((12)) B. Schroer und K. Bardakci, Ref.((1)) (1965)
- ((13)) K. Symanzik, J. Math. Phys., im Druck
- ((14)) B.A. Arbuzov und A.T. Filippov, Phys. Letters 13, 95 (1965);
Preprints, Dubna (1965)
N.N. Khuri und A. Pais, Rev. Mod. Phys. 36, 590 (1965)
R.F. Sawyer, Ref.((1)) (1964)
G. Feinberg und A. Pais, Ref.((1)) (1963)
G. Domokos, Acta Phys. Austriaca Suppl. I (1965)
F. Calogero, Nuovo Cimento 37, 756, 760 (1965)
R. Blomer, Peratisierung im Impulsraum, Universität München (1966)
- ((15)) B.A. Lippmann und J. Schwinger, Phys. Rev. 79, 469 (1950)
- ((16)) A.S. Wightman, Phys. Rev. 101, 860 (1956)
- ((17)) H.P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder und K. Yamazaki, Zeitschr. f. Naturforschung 14a, 441 (1959)
- ((18)) W. Güttinger, Ref.((5))
- ((19)) S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, New York 1962

Herrn Dr. W. Güttinger bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und die zahlreichen Diskussionen sehr dankbar.

Herrn Prof. Dr. F. Bopp danke ich für die Arbeitsmöglichkeit an seinem Institut, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung.

Lebenslauf

Ich wurde am 21. 11. 1941 in Burghausen als einziger Sohn des Elektrikers Josef Pfaffelhuber und seiner Frau Friederike geboren. Nach Besuch der dortigen Volksschule trat ich in die Oberrealschule Burghausen über und schloß im Juni 1960 mit dem Abitur ab. Im November 1960 immatrikulierte ich mich an der Universität München für die Fächer Physik und Mathematik. Auf Grund meiner schulischen Leistungen erhielt ich vom Beginn meines Hochschulstudiums an bis zum Sommersemester 1965 das Bayerische Stipendium für besonders Begabte. Im Wintersemester 1962/63 legte ich die Diplom-Vorprüfung in Physik mit der Note ausgezeichnet ab. Im Sommersemester 1964 und Wintersemester 1964/65 fertigte ich meine Diplomarbeit mit dem Thema "Peratisierung schwacher Wechselwirkungen und singuläre Potentiale" an und bestand im Juli 1965 die Diplom-Hauptprüfung in Physik mit der Gesamtnote ausgezeichnet. 1965 habe ich zwei wissenschaftliche Arbeiten veröffentlicht. Meine weiteren wissenschaftlichen Untersuchungen wurden durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft unterstützt. Von 1965 bis jetzt fertigte ich meine Dissertation an.

Ernst Pfaffelhuber

